

## 2つのゆらぎを持つ複雑系の統計的解析法

著者	池田 展敏
学位授与機関	Tohoku University
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10097/54065">http://hdl.handle.net/10097/54065</a>



# 博士學位論文

論文題目 2つのゆらぎを持つ複雑系の  
統計的解析法

提出者 東北大学大学院情報科学研究科  
情報基礎科学 専攻

学籍番号 7ds15

氏名 池田展敏



指 導 教 官	中 村 維 男 教 授
審 査 委 員 (○印は主査)	○ 中 村 維 男 教 授 1 猪 岡 光 教 授    2 原 啓 明 教 授 3 _____ 教 授    4 _____ 教 授 5 _____ 教 授    6 _____ 教 授



①

## 2つのゆらぎを持つ複雑系の統計的解析法

池田展敏

東北大学、情報科学研究科

〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉



# 目次

第1章 緒論	3
1.1 確率微分方程式の研究の歴史	3
1.2 2つのノイズ源を含む体系に関する研究	7
1.3 本論文の目的	8
1.4 本論文の構成	9
第2章 複雑系の統計的諸量の導出	11
2.1 序論	11
2.2 方法論	12
2.2.1 階段関数型ゆらぎの導入	12
2.2.2 外力の項のみが時間変化する場合	14
2.2.3 振動数ゆらぎも存在する場合	17
2.3 時間相関のない振動数ゆらぎの場合の平衡分散値の導出	19
2.3.1 振動数ゆらぎがない場合	19
2.3.2 時間相関のない振動数ゆらぎの場合	21
2.4 有色な振動数ゆらぎの場合の2次モーメントの近似的導出	27
2.4.1 $U_{n+1}^{-1}U_n$ の非対角項による展開	27
2.4.2 キュムラントの導入	30
2.5 近似の妥当性	33
2.6 エネルギー的不安定性	36
2.7 本章のまとめ	40
第3章 2階線形確率微分方程式の解の動的性質	42
3.1 序論	42
3.2 2次モーメントの平衡値への緩和過程	43
3.3 パワースペクトル	45
3.4 確率密度関数の時間的变化	49
3.4.1 フォッカー・プランク方程式による扱い	49
3.4.2 シミュレーションによる扱い	52
3.5 本章のまとめ	61



第4章 複雑系としての粘性流体中の振動問題	63
4.1 序論	63
4.2 力学モデル	64
4.3 本論文の方法論による解析	67
4.3.1 1階線形確率微分方程式による扱い	67
4.3.2 2階線形確率微分方程式による扱い	72
4.3.3 結果の比較	73
4.4 弾性円柱の不安定性	75
4.5 本章のまとめ	78
第5章 結論	79
付録A 乗数的ノイズの伊藤の解釈とストラトノビッチの解釈	82
付録B キュムラント展開	84
付録C Fokker-Planck 方程式の導出	86



# 第1章 緒論

本論文は、システムの時間発展を表現する方程式において外力部分と振動数部分がランダム変数となっている、いわゆる確率微分方程式において、それが規定する時系列の複雑な挙動を調べるものである。その解析のために、モーメント、自己相関関数、パワースペクトルなどの統計量を求める方法が提案される。さらにこの解析法により、実際の体系の複雑な変動の解析も試みる。この最初の章では、本論文の位置付けと意義を明確にするために、これまでこの分野でなされた研究について概観した上で、本論文の目的と構成を述べる。まず1.1節では、確率微分方程式の研究の歴史を短く述べたあと、それが複雑系の数理解理解にどのように関わっているか論じる。1.2節では、2つのノイズ源を持つ体系に関する研究など特に本論文に関係する最近の研究成果について論じる。1.3節、1.4節は、それぞれ本論文の目的と構成である。

## 1.1 確率微分方程式の研究の歴史

確率微分方程式の研究は古く、P. Langevin (1908) がブラウン運動を記述するために、流体を構成する分子の不規則な衝突による外力を確率的な力としてブラウン粒子の運動方程式に取り入れたことにさかのぼる。ブラウン運動とは1827年に植物学者 R. Brown が発見した水中の花粉などが行う不規則な運動のことであり、その力学的な描像は20世紀になるまでなかったのである。ブラウン運動の研究がさかんに研究された理由としては、一つにはそれが当時原子論の物理的な証拠として考えられたことが挙げられる。原子・分子論は仮説に過ぎないという批判が存在した20世紀初頭において、ブラウン運動の理論的研究とその実験的検証によって、原子・分子の存在を物理的に実証する試みは非常に意味深いものとして捉えられた [1]。また別の理由として、平衡からわずかにずれた状況下の熱力学の理解に対しても、ブラウン運動におけるゆらぎの研究が1つの有効な方法となることが挙げられよう。



ブラウン運動の研究以前においても、平衡状態の熱力学を物質の微視的な構成要素から説明する試みは一応の成功をおさめていた。しかし、例えばネルンストの関係式 [2]、ナイキストの関係式 [3] などの現象論が示す、弱い外場が加わった物質の応答に関する性質については、微視的立場からの古典統計力学は何も答えない。それら現象論は輸送係数（ブラウン粒子の流体中での易動度や電気回路中の抵抗）が、外場の無い平衡状態における物質の性質と関係していることを示していたが、Einstein [4] や Smoluchowski [5] らは、ブラウン運動の確率微分方程式による記述によって、これらの現象の微視的立場からの理論的説明に成功した。この成功から、確率微分方程式の研究は、後に発見される線形応答理論 [6, 7] とともに非平衡系熱力学を推進する有効な方法として、さかんに研究されることとなった。

このように確率微分方程式は現象を微視的な立場から論じるために導入されたが、数学的には確率項の積分やその積分の期待値等を数学的に定義づけする必要があった。例えば積分に関する数学的基礎づけの発展としては、伊藤積分、ストラトノビッチ積分が有名である。本論文では数学的議論にあまり踏込まず、付録 A で、伊藤積分、ストラトノビッチ積分について簡単に触れるのみにする。

また一方、予測不可能な振る舞いを確率過程として運動方程式に取りこむという素朴な発想は、その対象を熱力学だけに留める理由を持たない。従ってその後、ブラウン運動を記述するいわゆるランジュバン方程式の拡張に関し多くの発展があった。その代表的なものは、次のようなポテンシャル場を考慮したブラウン粒子を記述する確率微分方程式である。

$$\frac{d^2}{dt^2}x + \alpha \frac{d}{dt}x + \frac{d}{dx}V(x) = f(t) \quad (1.1)$$

ここで、 $x$  はブラウン粒子の位置、 $f(t)$  はランダムな外力、 $V(x)$  はポテンシャル、 $\alpha$  は粘性を表す。最初水中のブラウン粒子の記述のために考察されたランジュバン方程式では  $V(x) = 0$  とおかれたが、その後このポテンシャル  $V(x)$  を考慮した議論が行われたのである。

最も簡単なポテンシャルの導入としては、ばねによるポテンシャル、つまり変位  $x$  に比例する力が存在する場合が挙げられる。この問題は、G.E. Uhlenbeck, L.S. Ornstein [8] らによって解かれた。それによると、この変位  $x$  の振る舞いは  $V(x) = 0$  の場合のランジュバン方程式の  $\frac{d}{dt}x$  の振る舞いと近似的に等しい。この問題は本研究と直接関係しているので、後章で必要に応じて述べることにする。さらなるポテンシャルの拡張のうち重要なものとして、周期



的なポテンシャル [9] のようにポテンシャルの極小値がいくつか存在する場合が挙げられる。この問題は例えば、イオン化された導体 [10]、ジョセフソン・トンネル接合 [11, 12, 13]、のような様々な具体的問題のモデルに対応しており、さかんに研究された。

近年特に注目されているのは、非対称なポテンシャル場を動くブラウン粒子の問題である [14]。この系では、外力ゆらぎに時間相関があると、ブラウン粒子がポテンシャルの山を越えるのみならず、確率的流れがポテンシャルの高い方へ生じることが知られている [15]。これらの機構が生体系で利用されているという仮説や、ノイズから取り出せるエネルギー効率 [16] などが最近議論されている。その他には、2重井戸 (double well) ポテンシャルに関してもポテンシャル極小がいくつか存在する系の研究は積極的に行われている [17, 18, 19]。これらのランジュバン方程式の解析に最もよく使われている方法は Fokker-Planck 方程式を用いたものである [20]。ランジュバン方程式が確率変数の時間発展を記述するのに対し、Fokker-Planck 方程式は同じ現象を確率変数の確率密度関数の時間発展で記述する。この Fokker-Planck 方程式はブラウン粒子の位置を表す確率変数の 1 次モーメントと 2 次モーメントによって特徴づけられる (付録 C 参照)。本論文では、この立場からの議論が 3.4 節で行われる。

また、ランジュバン方程式の拡張の別の流れとしては、乗数的ノイズ (multiplicative noise) のある場合が挙げられる。その典型的な確率微分方程式の例は、 $n^2(\vec{r})$  を確率的ゆらぎとして、

$$\nabla^2 \Psi + k_0^2 n^2(\vec{r}) \Psi = f(\vec{r}) \quad (1.2)$$

である。このように状態変数  $\Psi$  にノイズが積の形で入っている場合のノイズを乗数的ノイズという。(1.2) 式は、例えば誘電率や弾性率の時間空間的な変化が複雑で決定論的に表現できない場合を想定した、ランダムな媒質中の電磁波や弾性波の伝播の問題に関連してさかんに研究されてきた [21]。というのも、この問題はラジオ波を用いた通信などの工学的な問題に深く関わっているからである [22, 23]。

この問題の解の統計的性質を調べるため、状況に応じてさまざまな近似法、例えば、摂動論を利用した近似法 [24, 25]、汎関数積分を利用した近似法 [26]、波の波長が短い場合に対する幾何光学近似 [27, 28] などが提案されている。また (1.2) 式の一次元問題に関しては厳密に統計量の求まる模型が存在し [29, 30]、これら厳密解は一般の問題の定性的理解や近似法の妥当性の議論に役立っている。このランダム媒質中の波の伝播の問題は、その工学的重要性



から最近も多くの研究がなされている分野である [31]。

現在、確率微分方程式の応用という面から見ると、例えば、境界値問題などの数学的問題 [32, 33]、カルマンフィルタなどの推定理論、株価の変動 [34, 35] やインターネット上の混雑に関する理論 [36] などの社会現象、化学反応の理論 [37] など、例を挙げてみただけでも、その適用可能な分野が大きな広がりを見せていることがわかる。また立場は異なるが類似の問題として、清水らによる、ノイズを入れる代わりにカオスが原因となるゆらぎを導入した方程式を使ったニューラルネットワークに関する議論なども行われている [38, 39]。

このような広がりの中で、特に本研究では複雑な挙動を示すシステムのダイナミクスという現象に注目する。状態変数が複雑な挙動を示す運動方程式の代表的なものとしては、確率微分方程式以外にも、非線形写像、遅れの効果を伴った運動方程式等が考えられよう。これらに共通していえるのは、一見簡単な運動方程式においてさえも、非線形項、確率変数である係数、遅れの効果（過去の変数依存性）、などを考慮すると、最終的に得られる解がしばしば予測困難な特異な振る舞いを示すことである。

例えば、非線形写像によるカオスの生成 [40, 41] は今日ではよく知られている。この場合のカオス性は、単に乱雑というのではなくカオス領域のストレンジアトラクタが持っているフラクタル性などの自己相似的秩序を伴っている点で、複雑系特有の性質を持っている。また、遅れの効果に関わる研究については、光学系の実験 [42] やカオス系の制御問題 [43]、交通流モデルの問題 [44, 45]、等に関連して行われており、これらの系では内部パラメタによりその特性を劇的に変化させることが可能である。

これらのシステムの持つ性質は、相転移的性質や不安定性などの複雑な挙動としてまとめられよう。この性質は最近注目されているノイズ誘起相転移（noise-induced transition）[46] や確率共鳴 [47] などのノイズを含む体系にも共通している。確率共鳴とは外力の周期と散逸系のノイズが同期する現象で、線形振動子の周期外力による共鳴現象と類似性がある。最近、確率共鳴が生体现象をはじめ、多くの系において利用されている可能性が指摘されている [48, 49, 50]。周期的ポテンシャルやこの確率共鳴の議論に見られるように、ノイズという一見不必要なものが、その体系の示す性質に欠くことのできないものであるという考え方が浸透しつつあるのは興味深い。



## 1.2 2つのノイズ源を含む体系に関する研究

前節では、ブラウン運動の記述から始まった確率微分方程式の研究が、様々な動的現象へ適用する目的のために多くの種類の微分方程式へ取り入れられ拡張された経過を述べ、その複雑系数理への関わりについて触れた。その関わりの中でも、本論文では2つの確率変数を係数に持つ確率微分方程式、特に減衰項を持つ振動子で外力と振動数が確率的に揺らぐ場合について詳しく扱うことにする。

これまでこの体系にはある種の相転移的な振る舞いがあるということが知られてきたが、その定量的解析はいまだ十分でなく、さらにノイズにより誘起される解の複雑な挙動も予想される。その相転移的な振る舞いとは、振動数を表すパラメタの確率的ゆらぎの大きさがある値を越えるとその振動子の変位に関するモーメントが発散してしまうというものである。これは、1971年、R. Bourret がエネルギー的不安定性として最初に指摘した [52]。振動数が確率的に揺らぐことは (1.2) 式のように乗数的ノイズを扱うということの意味しているが、外力の確率的ゆらぎも同時に存在することにより、解の振る舞いが特異な性質を持つようになるのである。この問題の一般的扱いは難しいが、これまで簡単なノイズのモデルに対しては厳密に2次モーメントの平衡値が求められている [53, 54]。

最近、乗数的ノイズと外力ノイズに誘起される解の複雑な振る舞いに関して、1階微分方程式の場合がよく研究されている。その例としては、すでに前節でいくつか紹介したが、株価の変動モデル [34, 35]、乱流中の高分子モデル [55]、インターネット上の混雑の頻度 [36, 56]、レーザーのモデル [57, 58]、そして本論文中第4章のような力学モデル [59] など、複雑な動的現象を記述するモデルが挙げられよう。この場合の典型的な確率微分方程式は、

$$\frac{d}{dt}x = (-k + f(t))x + \xi(t) \quad (1.3)$$

である。ここで、 $f(t)$  と  $\xi(t)$  がランダムな変動をする確率変数である。

この方程式において、 $f(t)$  と  $\xi(t)$  が離散的な値をとる1つのマルコフ過程の関数である場合の確率密度関数 [60] や、 $f(t)$  がガウス過程で  $\xi(t)$  がホワイトノイズの場合の2次モーメント計算 [61]、定常的な確率密度関数のべき関数的振る舞い [51] などの報告がある。これらの結果は全て、ノイズの性質に応じてモーメントが発散することを示しているが、その事実は確率密度関数のべき的な性質やこの系の確率的不安定性の存在を示唆している。確率密度関



数のべき的な性質は、最近いくつかの系で指摘されている重要な性質である [60, 61, 51]。また、確率的不安定性に関しては、その定義、基準等、難しい問題であるが、少なくとも、2次モーメントの発散はガウス分布のように特徴的な長さの範囲に状態変数が収まることは意味しておらず、最も簡単な安定性の消失条件といえよう。

2つのノイズ源が関係する問題は、体系の内部状態と外部状態それぞれに関するノイズの導入の必要性からも議論されている [62, 63]。複雑な動的現象を対象にする時、2つのノイズ源を含む系に関する研究対象は広い範囲に渡っており、その理解は複雑な系の統計的応答特性を解明する点からも重要である。

### 1.3 本論文の目的

本論文では、前節で述べた2つの確率的ゆらぎを持つ複雑な系のダイナミクスを対象にし、その典型的な例として、振動数と外力が確率的に変動する2階線形確率微分方程式を取り上げる。これまで複雑なダイナミクスの研究は数値計算に基づいたものが中心となってきたといえるが、一方、より簡単化された数理モデル上での理論的解析も重要である。そこで本論文では、この方程式の厳密解を得る新しい解析法を提案し、その結果をもとに2つのゆらぎが原因で生じるシステムの複雑な振る舞いの発生機構を理論的に考察することを目的とする。これは、前節で述べたエネルギー的不安定性の発生機構の解明につながる。このため、確率微分方程式によって生成される時系列のモーメント、自己相関関数を具体的に求める。

これらの量の導出からどのようなことがわかるのか次に述べる。まず2次のモーメントは、微分方程式が記述する体系のエネルギーに対応しているので、直接観測可能かつ物理的に重要なものといえる。例えば、調和振動子の変位の場合や、電磁気や弾性体における波動方程式を記述する場合がそうである。さらに一般に $n$ 次のモーメント ( $n$ は整数) を求めることにより、その確率分布関数に関する詳細な情報を得ることができる。特に本論文では、得られた2次モーメントの厳密な表式から、2次モーメントの発散条件について詳しく論じるが、その条件は確率分布関数のすそのべき関数的か否かに関し情報を与える。なぜなら、例えばもし確率分布関数の漸近形が $-(n+1)$ 次よりも遅い減少の仕方をするならば、 $n$ 次のモーメントが発散するからである。その逆は必ずしも正しくないが、正しくない例はかなり例外



的であろう。確率分布関数のすそのがべき関数的であることは体系のゆらぎ方の不安定を示しており、体系の統計的応答特性の理解に重要である。

一方、自己相関関数からはウィーナー・ヒンチンの定理によるとフーリエ余弦変換を通じて、パワースペクトルが得られる。パワースペクトルのべき則、特に  $1/f$  ゆらぎに関する経験的事実が多く知られているが [64, 65]、そのことはゆらぎの変化のうち、波長の長いゆらぎ成分の振幅が非常に大きいことを示している。複雑な系にもしばしば見られるこの不可思議な現象の数理モデルによる理論的解明は未だ十分なされていない。

また、本研究が目的とする確率微分方程式の解の統計量の導出は工学上の重要な問題と関連がある。例えば従来のカルマンフィルターの理論において、状態方程式により生成される時系列がガウス過程であるという事実がその理論に重要であり、そのことが状態変数の予測を非常に容易にしている。しかし、仮に状態方程式が乗数的ノイズを含むような複雑なものでも、状態変数の統計的性質が完全に理解されれば、状態変数の予測理論の拡張が可能になるかもしれない。一般に確率過程の推測・予測には、まずその統計的性質を理解することが重要なのである。

## 1.4 本論文の構成

本論文は大きく分けて2つの部分から構成される。まず前半の第2章と第3章では、数理モデルの立場から2階線形確率微分方程式の解の統計量を導出する新しい方法の提案とその実際の計算を行う。後半の第4章では、第2章、第3章で提案した方法とその解析法による結果を、ある粘性流体中の弾性円柱の振動問題に適用し、モーメントの不安定性を議論する。

第2章では最初に振動数が確率変数として階段関数的に揺らぐ場合の確率微分方程式を導入する。さらにその仮定のもとで解の形式解が和の形で求められ、この新しいモデル化に基づく統計量の計算法が説明される。この結果、時間相関が非常に簡略化されたある種のゆらぎに対して困難なく厳密な計算が可能となる。最終的に2.6節で、この厳密解をもとに2次モーメントの収束値・発散の様子が議論される。しかしながら、時間相関を考慮した、より一般的な振動数ゆらぎの場合には依然計算は困難である。そこで2.4節では、新しい近似法が提案され、近似の妥当性などが2.5節で議論される。



第2章で状態変数の振る舞いの平衡的な統計的量の解析法を述べたのに対し、第3章では状態変数の時間的な変化について調べる。まず3.2節では2次モーメントの過渡的な振る舞いが、前章の厳密な理論をもとに議論される。さらに3.3節では状態変数の実際の軌跡に対する情報を与える状態変数の時間変化のパワースペクトルについて調べる。そのため、2章で述べた2次モーメントの近似的導出法を用い自己相関関数を求める。3.4節では、確率密度関数の時間変化を、Fokker-Planck 方程式とシミュレーションにより調べる。

第4章はゆらぎを伴う外力下の弾性円柱振動問題の統計的性質を議論する。このモデルの最も簡単な近似では、確率微分方程式は1階微分方程式になる。そこで2章の方法論を1階の微分方程式の場合に適用することを試みる。また、本来のモデル方程式である2階微分方程式にも本論文の方法を適用し、1階の微分方程式への近似の妥当性や、弾性円柱の不安定性の出現に関して論じる。

第5章は結論である。



## 第2章 複雑系の統計的諸量の導出

### 2.1 序論

以下、第2章と第3章では複雑なダイナミクスを持つ体系の典型例として次の2階線形確率微分方程式を扱う。

$$\ddot{x}(t) + \alpha \dot{x}(t) + \omega^2(t)x(t) = f(t), \quad (2.1)$$

ここで $\alpha$ は定数であり、 $\omega(t)$ と $f(t)$ は、それぞれ確率的なゆらぎの成分（ノイズ）を持つ振動数と外力である。この確率微分方程式で生成される時系列 $x(t)$ の統計量を求めるために、本章では階段関数的に変化するゆらぎのモデルを導入する。一方、これと同じ問題を扱ったBourret[53]やWest[54]らは、 $\omega^2(t)$ が2値マルコフ鎖（dichotomic Markov chain）であること、またはデルタ相関[54]を持つこと、を仮定して $x(t)$ の1次、2次モーメントの平衡値を厳密に求めた。このように $\omega^2(t)$ の性質を何か仮定して計算を進めるという点で本論文はこれらの研究と類似している。しかし、本論文のねらいは厳密なモーメントを求めるということだけでなく、ノイズの時間相関を取り入れるなど体系の記述を様々な状況に対応可能にしたり、あるいは解の動的性質を議論することにある。

もちろん一般のノイズの場合には厳密な計算は難しく近似理論が必要になる。そこで2.4節において振動数ゆらぎの大きさを摂動とした近似を導入するが、それは本論文独自のものである。これによって $\omega^2(t)$ が有色なノイズとなる場合に対しても近似計算が実行可能となる。

また、(2.1)式の解のモーメントはパラメタの性質によって発散することがあるということに注目したい。第1章でも指摘したが、このことは確率密度関数のべき則性やシステムの不安定性の出現を示している。この点について、これまでなされた研究の結果について簡単にまとめてみる。Bourret[53]やWest[54]の結果では2次のモーメントは、 $\omega^2(t)$ が定数である



場合の結果 [8] において、減衰係数  $\alpha$  を適当な有効減衰係数に置き換えた形、すなわち、

$$\langle x^2 \rangle_{eq} = \langle f^2 \rangle / (2\alpha_{eff}\omega_0^2) \quad (2.2)$$

となる。ここで  $\omega_0$  は振動数の平均値であり、また  $\alpha_{eff}$  はもともとの式の  $\alpha$  とは異なり振動数ゆらぎを規定するパラメタの関数（有効減衰係数）である。 $\alpha_{eff}$  は、振動数ゆらぎの強度が大きい場合にゼロになる場合があるので、この結果は、平衡 2 次モーメント（エネルギー）が収束値を持つ状況から発散する状況への転移の可能性を表している。

本論文ではこれと類似が別の形式化により導かれ、その 2 次モーメントの発散のふるまいが 2.6 節でまとめられる。

## 2.2 方法論

### 2.2.1 階段関数型ゆらぎの導入

本論文では種々の統計量を形式論でなくあからさな形で計算するために、ノイズの時間的な変化を次のように階段関数的なものと仮定する [66]。

$$\Delta t_f(l-1) \leq t < \Delta t_f l \quad \text{の時} \quad f(t) = f_l \quad (2.3)$$

$$\Delta t_\omega(l-1) \leq t < \Delta t_\omega l \quad \text{の時} \quad \omega(t) = \omega_l \quad (2.4)$$

ここで  $l$  は整数である。また  $\Delta t_f$  と  $\Delta t_\omega$  はある時間間隔を表す定数パラメタである。本論文では、実際に平均値を計算する際には、上述のように各時間間隔ごとに定義された外力値  $f_l$  は、全て平均値がゼロで、互いに独立として計算する。式で書くと、

$$\langle f(t) \rangle = 0 \quad (2.5)$$

$$\langle f_i f_j \rangle = f^2 \delta_{ij} / \Delta t_f \quad (2.6)$$

である。以下途中の形式化まではこのような仮定を必要としないことに注意したい。

また、仮定 (2.6) を今後、‘外力ゆらぎに時間相関がない場合’ ということがある。ただし、(2.6) が成り立っていても、互いの時間差が  $\Delta t_f$  よりも小さいような異なる時刻の外力値は 1 の相関がある場合があるので、‘時間相関がない’ というこの表現は正確ではないことに注意さ



りたい。むしろ時間間隔  $\Delta t_f$  には、相関の非常に強いような時間差といった意味がある。同様に、今後、‘振動数ゆらぎに時間相関がない’とは、 $\omega_l^2 = \omega_0^2(1 + \epsilon_l)$  のように振動数の平方の平均値からのずれを  $\epsilon_l$  とおいて、

$$\langle \epsilon_i \epsilon_j \rangle = \langle \epsilon^2 \rangle \delta_{ij} \quad (2.7)$$

したがって、

$$\langle \omega_i^2 \omega_j^2 \rangle = \omega_0^4 (1 + \langle \epsilon^2 \rangle \delta_{ij}), \quad (2.8)$$

を意味するものとする。このことも本当の意味で時間相関がないというわけではない。

さらに、平均操作を行う上で、外力ゆらぎと振動数ゆらぎは統計的に独立であると仮定する。外力ゆらぎと振動数ゆらぎの変化する時間間隔の間には次のような関係があると仮定する。

$$\Delta t_\omega = m \Delta t_f \quad (2.9)$$

ここで  $m$  はある定整数である。この仮定を用いると、 $m$  の値を適切に選ぶことによって振動数ゆらぎが外力ゆらぎよりも遅く時間変化するような実際的な状況を表すことができる。

このようにノイズを仮定してしまうことはある程度モデルを限定するようにも見えるが、ノイズを規定する種々のパラメタ（例えば階段の幅  $\Delta t_\omega, \Delta t_f$ 、ゆらぎの振幅、確率変数  $\omega_l, f_l$  の相関の仕方、 $m$ ）を適切に変えることで、多くの状況の近似的状況を実現することが可能であろう。例えば、図. 2.1, 図. 2.2 には（前述の意味での）時間相関のないゆらぎと、時間相関のあるゆらぎそれぞれについての自己相関関数が示してある。時間相関のない図. 2.1 の場合、かなり限定されたゆらぎ方しか実現しないが、時間相関のない図. 2.2 の場合、異なる時間間隔における相関の仕方をさらに考慮したり  $\Delta t_\omega$  をさらに小さくすることによって、自然なゆらぎ方を実現できる。本論文では、図. 2.1 に対する議論が 2.3 節で行われ、図. 2.2 に対する議論が 2.4 節で行われる。

しかしながら、上述の仮定が計算結果の適当な極限操作にどのような制限を与えているのか疑問が残る。例えば、乗数的ノイズのある確率微分方程式の積分における伊藤積分やストラトノビッチ積分（付録 A 参照）のように、ある種の条件は極限操作の結果に影響を与えかねないので注意が必要である。ただ、少なくとも本論文の平均操作等の計算は、ゆらぎに関する上述の仮定のもとで曖昧さなし行われる。ただし、ゆらぎに関する上述の仮定が、連続



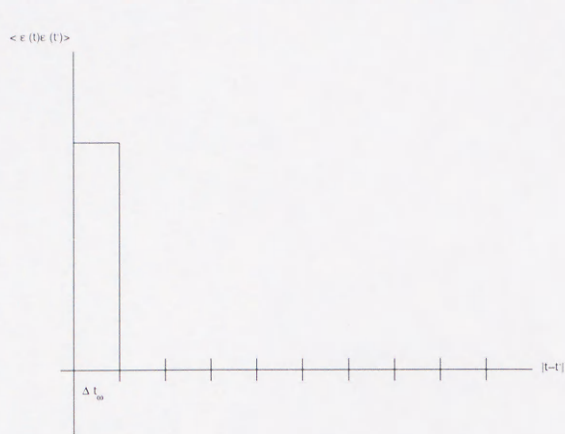


図. 2.1: 本論文の意味で時間相関のないゆらぎの自己相関関数

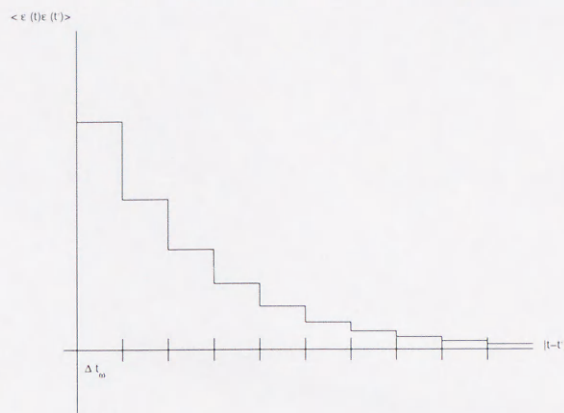


図. 2.2: 適当な時間相関を取り入れたゆらぎの自己相関関数。  $\Delta t$  を小さくすればさらに自然な関数形が得られる。

的な変動をするノイズの近似であるという立場をとるならば、そのためにどのような誤差が生じるのかは興味ある問題である。

この章の目標は、これまで述べてきた仮定のもとでモーメントを求めることであるが、おおまかな手続きは、ノイズの標本関数に対する解を最初に求め、次にその解に対して平均操作をとることである。そこで次の2つの小節で、 $m$  が無限大すなわち外力の項のみが時間変化する場合、 $m$  が有限の場合、それぞれについて、ゆらぎの標本関数に対する解の導出を行う。

## 2.2.2 外力の項のみが時間変化する場合

仮定 (2.3) から、初期時間間隔  $0 \leq t < \Delta t_f$  では方程式は単なる定数係数の2階線形微分方程式になる。したがって、その一般解として時刻  $\Delta t_f$  における変位  $x(\Delta t_f)$  が次のように求められる。 $\alpha^2 - 4\omega^2 > 0$  の場合は、

$$x(\Delta t_f) = e^{-\alpha \Delta t_f / 2} (a \exp(-(\alpha^2 - 4\omega^2)^{1/2} \Delta t_f / 2) + b \exp((\alpha^2 - 4\omega^2)^{1/2} \Delta t_f / 2)) + f_1 / \omega^2 \quad (2.10)$$

$\alpha^2 - 4\omega^2 < 0$  の場合は、

$$x(\Delta t_f) = e^{-\alpha \Delta t_f / 2} (a \exp(i(4\omega^2 - \alpha^2)^{1/2} \Delta t_f / 2) + b \exp(-i(4\omega^2 - \alpha^2)^{1/2} \Delta t_f / 2)) + f_1 / \omega^2 \quad (2.11)$$

である。ここで  $i$  は純虚数である。



また  $a$  や  $b$  は初期条件  $x(0)$  と  $dx(0)/dt$  から決まる定数であり、 $\alpha^2 - 4\omega^2 > 0$  の場合、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\alpha + k)/2k & -1/k \\ (\alpha + k)/2k & 1/k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ dx(0)/dt \end{pmatrix} - f_1/\omega^2 \begin{pmatrix} (-\alpha + k)/2k \\ (\alpha + k)/2k \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

$$k^2 = \alpha^2 - 4\omega^2 \quad (2.13)$$

となり、 $\alpha^2 - 4\omega^2 < 0$  の場合には、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha + ik)/2ik & 1/2ik \\ (-\alpha + ik)/2ik & -1/2ik \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ dx(0)/dt \end{pmatrix} - f_1/\omega^2 \begin{pmatrix} (\alpha + ik)/2ik \\ (-\alpha + ik)/2ik \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

$$k^2 = 4\omega^2 - \alpha^2 \quad (2.15)$$

となる。

(2.10) 式と (2.12) 式、または (2.11) 式と (2.14) 式を組み合わせることにより、変位と速度の初期条件から時刻  $\Delta t_f$  における変位と速度への線形変換の式が次のように得られる。

$$\mathbf{x}(\Delta t_f) = T\mathbf{x}(0) + f_1\mathbf{v} \quad (2.16)$$

ここで、

$$\mathbf{x}(\Delta t_f) = \begin{pmatrix} x(\Delta t_f) \\ dx(\Delta t_f)/dt \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ dx(0)/dt \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

であり、 $\alpha^2 - 4\omega^2 > 0$  の場合に対しては、

$$T = e^{-\alpha\Delta t_f/2} \begin{pmatrix} (k - \alpha)e^{-k\Delta t_f/2}/2k + (k + \alpha)e^{k\Delta t_f/2}/2k & -e^{-k\Delta t_f/2}/k + e^{k\Delta t_f/2}/k \\ \omega^2 e^{-k\Delta t_f/2}/k - \omega^2 e^{k\Delta t_f/2}/k & (k + \alpha)e^{-k\Delta t_f/2}/2k + (k - \alpha)e^{k\Delta t_f/2}/2k \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{v} = -e^{-\alpha\Delta t_f/2}/\omega^2 \begin{pmatrix} (k - \alpha)e^{-k\Delta t_f/2}/2k + (k + \alpha)e^{k\Delta t_f/2}/2k \\ (\omega^2)e^{-k\Delta t_f/2}/k + -\omega^2 e^{k\Delta t_f/2}/k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

また、 $\alpha^2 - 4\omega^2 < 0$  の場合に対しては、

$$T = e^{-\alpha\Delta t_f/2}/k \times \begin{pmatrix} (\alpha/2) \sin(k\Delta t_f/2) + (k/2) \cos(k\Delta t_f/2) & \sin(k\Delta t_f/2) \\ -\omega^2 \sin(k\Delta t_f/2) & (-\alpha/2) \sin(k\Delta t_f/2) + (k/2) \cos(k\Delta t_f/2) \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{v} = (-2/k\omega^2)e^{-\alpha\Delta t_f/2} \begin{pmatrix} (\alpha/2) \sin(k\Delta t_f/2) + (k/2) \cos(k\Delta t_f/2) \\ -\omega^2 \sin(k\Delta t_f/2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$



である。

この関係は任意の区間  $\Delta t_f(l-1) \leq t < \Delta t_f l$  においても同様なので、これらをくり返し使うことにより、外力の標本  $\{f_1, f_2, \dots, f_l\}$  に対する振動子の変位と速度を得ることができる。その計算には、遷移行列  $T$  を対角化した方が簡単である。 $T$  の対角化行列  $U$ 、固有値  $\lambda^{(\pm)}$  は以下のように求められる。 $\alpha^2 - 4\omega^2 > 0$  の場合に対しては、

$$S = \begin{pmatrix} \lambda^{(+)} & 0 \\ 0 & \lambda^{(-)} \end{pmatrix} = U^{-1} T U \quad (2.22)$$

$$\lambda^{(\pm)} = \exp((- \alpha \pm k) \Delta t_f / 2) \quad (2.23)$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (k - \alpha)/2 & (-k - \alpha)/2 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

また、 $\alpha^2 - 4\omega^2 < 0$  の場合に対しては、

$$\lambda^{(\pm)} = \exp((- \alpha \pm ik) \Delta t_f / 2) \quad (2.25)$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (ik - \alpha)/2 & (-ik - \alpha)/2 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

対角化に伴う変数変換を次のように定義する。

$$\mathbf{y}_l \equiv \begin{pmatrix} y_l^{(1)} \\ y_l^{(2)} \end{pmatrix} = U^{-1} \mathbf{x}_l \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} &= U^{-1} \mathbf{v} \\ &= 1/2k\omega^2 \begin{pmatrix} (-k - \alpha)(\exp((k - \alpha)\Delta t_f/2) - 1) \\ (-k + \alpha)(\exp((-k - \alpha)\Delta t_f/2) - 1) \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 > 4\omega^2 \text{ のとき} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} &= i/4k\omega^2 \begin{pmatrix} (\alpha + ik)(\exp((ik - \alpha)\Delta t_f/2) - 1) \\ (-\alpha + ik)(\exp((-ik - \alpha)\Delta t_f/2) - 1) \end{pmatrix}, \quad 4\omega^2 > \alpha^2 \text{ のとき} \\ &\quad (2.29) \end{aligned}$$

$y_l^{(1)}$  や  $y_l^{(2)}$  は外力のみが変動する時の、2階線形微分方程式の2つの一次独立な解を表しており、一般解はこれらの単純な重ね合わせで書ける。これらは外力のない減衰解に外力由来



のゆらぎを加えたような振る舞いをするので、 $y_l^{(1)}$  や  $y_l^{(2)}$  を今後 2 つの減衰のモードとよぶことにする。

これらによって 2 つの減衰モード  $y_l^{(1)}$  と  $y_l^{(2)}$  に対する漸化式が

$$\mathbf{y}_l = S\mathbf{y}_{l-1} + f_l \mathbf{u} \quad (2.30)$$

のように得られ、これから  $y_l^{(1)}$  と  $y_l^{(2)}$  の表式が

$$y_l^{(1)} = (\lambda^{(+)})^l y_0^{(1)} + u^{(1)} \sum_{k=1}^l (\lambda^{(+)})^{l-k} f_k \quad (2.31)$$

$$y_l^{(2)} = (\lambda^{(-)})^l y_0^{(2)} + u^{(2)} \sum_{k=1}^l (\lambda^{(-)})^{l-k} f_k \quad (2.32)$$

と得られる。

これらの結果、(2.31) 式や (2.32) 式は外力のみが揺らぎ  $\omega^2(t)$  は定数の場合（すなわち仮定 (2.9) の  $m$  が無限に大きい場合）、に対する公式である。その統計的な計算については小節 2.3.1 で行い、先に次の小節で振動数ゆらぎも存在する場合の同様な公式を導出することにする。

### 2.2.3 振動数ゆらぎも存在する場合

振動数ゆらぎも存在する場合、すなわち  $m$  が有限の場合、仮定 (2.4) から  $\omega_n$  が区間  $\Delta t_\omega(n-1) \leq t < \Delta t_\omega n$ （この区間を、区間  $n$  とよぶ）ごとに異なるために、対角化行列  $U$  や対角行列  $S$  を区間  $n$  ごとに再定義しなくてはならない。そこで、以下区間  $n$  ごとに確率的に変化する量 ( $\lambda^{(\pm)}$ ,  $U$ ,  $k$  等) に区間を示す添え字  $n$  をつける。とはいえ、時刻  $m\Delta t_f$  までは (2.31) や (2.32) が使えるので、時刻  $m\Delta t_f$  における変数  $\mathbf{y}_m$  を  $\mathbf{Y}_{n=1}$  と書きかえると、

$$Y_{n=1}^{(1)} = \Lambda_{n=1}^{(+)} Y_{n=0}^{(1)} + F_{n=1}^{(1)} \quad (2.33)$$

$$Y_{n=1}^{(2)} = \Lambda_{n=1}^{(-)} Y_{n=0}^{(2)} + F_{n=1}^{(2)} \quad (2.34)$$

が成り立つ。ただし、ここで、

$$\Lambda_n^{(\pm)} = (\lambda_n^{(\pm)})^m \quad (2.35)$$



$$F_n^{(1)} = u_n^{(1)} \sum_{j=1}^m (\lambda_n^{(+)})^{m-j} f_{(n \times m)+j} \quad (2.36)$$

$$F_n^{(2)} = u_n^{(2)} \sum_{j=1}^m (\lambda_n^{(-)})^{m-j} f_{(n \times m)+j}, \quad (2.37)$$

とおいた。

一見、これらの式は (2.30) と同じ形をしているので、(??) 式や (2.32) 式を導いたのと同様に簡単に変数  $Y_n^{(1)}$  と  $Y_n^{(2)}$  を求められそうに見えるが、対角化行列  $U_n$  が区間  $n$  ごとに異なることを考慮すると、単純に漸化式を解くことができない。というのも、

$$\mathbf{Y}_n = U_{n+1}^{-1} \mathbf{X}_n \quad (2.38)$$

と定義すると、 $\mathbf{X}_n$  が、

$$\mathbf{X}_n = U_n \left( \begin{pmatrix} \Lambda_n^{(+)} & 0 \\ 0 & \Lambda_n^{(-)} \end{pmatrix} \mathbf{Y}_{n-1} + \begin{pmatrix} F_n^{(1)} \\ F_n^{(2)} \end{pmatrix} \right) \quad (2.39)$$

で得られることから、

$$\mathbf{Y}_n = U_{n+1}^{-1} U_n \left( \begin{pmatrix} \Lambda_n^{(+)} & 0 \\ 0 & \Lambda_n^{(-)} \end{pmatrix} \mathbf{Y}_{n-1} + U_{n+1}^{-1} U_n \begin{pmatrix} F_n^{(1)} \\ F_n^{(2)} \end{pmatrix} \right) \quad (2.40)$$

となり、非対角行列  $U_{n+1}^{-1} U_n$  の存在のために、1 成分の漸化式に書けないのである。

この結果を前小節の結果と比較してみる。前小節では (2.31) 式や (2.32) 式と (2.27) 式の逆変換より、単純に振動子の変位や速度が求められる。したがって、2 つのゆらぎ源のうち外力ゆらぎのみの存在下では、振動子の変位を求めるには各減衰モードを独立に計算すれば良い。一方、(2.40) 式では、非対角行列  $U_{n+1}^{-1} U_n$  があるために、振動数が変化した瞬間一方のモードは他方のモードに影響する。したがって、前小節のように 2 つの減衰モードを独立に扱うことができず、各減衰モードは影響を及ぼしあう。

この事情は、2 階以上の線形微分方程式で外力以外の係数が揺らぐ場合一般にでてくる状況である。ただ本論文の方法では振動数の変化は離散的時間上で瞬間的に起こり、そこでどのように各モードが影響し合うのかを非対角行列  $U_{n+1}^{-1} U_n$  によって明確にしているといえる。

この非対角行列  $U_{n+1}^{-1} U_n$  をあからさまに書いてみると、

$$U_{n+1}^{-1} U_n = \begin{pmatrix} (k_{n+1} + k_n)/2k_{n+1} & (k_{n+1} - k_n)/2k_{n+1} \\ (k_{n+1} - k_n)/2k_{n+1} & (k_{n+1} + k_n)/2k_{n+1} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$



となる。この行列をみると、 $k_n$  と  $k_{n+1}$  の差が小さいと  $U_{n+1}^{-1}U_n$  は単位行列に近いことがわかる。2.4 節では、このことを利用する。

変位に関する  $p$  次のモーメント ( $p$  は整数) を求める困難点は、時間変動する非対角行列  $U_{n+1}^{-1}U_n$  の存在と、2つのモードのクロスタームを多数計算する必要性から生じる。この困難点は2階以上の微分方程式で一般に生じるものといえる。

## 2.3 時間相関のない振動数ゆらぎの場合の平衡分散値の導出

前節で統計量を求める上での困難点を説明したが、ゆらぎに時間相関がない場合、その計算はかなり容易になる。この節では、外力ゆらぎはあるが振動数ゆらぎがない時と、外力ゆらぎも振動数ゆらぎもあるが時間相関はない時、それぞれについて、2次モーメントの平衡値計算を行う。

### 2.3.1 振動数ゆらぎがない場合

この場合、(2.31) や (2.32) の表式がただちに使える。十分に時間が経過 ( $l$  が大きい) した時平衡にあると仮定すると、 $\langle (y^{(1)})^2 \rangle_{eq} \equiv \langle (y_{l+1}^{(1)})^2 \rangle = \langle (y_l^{(1)})^2 \rangle$  が成り立つので、(2.31), (2.32) 式それぞれの2乗や、積に平均操作を促すことにより、

$$\langle (y^{(1)})^2 \rangle_{eq} = (u^{(1)})^2 \langle (f_l)^2 \rangle / (1 - (\lambda^{(+)})^2) \quad (2.42)$$

$$\langle y^{(1)} y^{(2)} \rangle_{eq} = u^{(1)} u^{(2)} \langle (f_l)^2 \rangle / (1 - \lambda^{(+)} \lambda^{(-)}) \quad (2.43)$$

$$\langle (y^{(2)})^2 \rangle_{eq} = (u^{(2)})^2 \langle (f_l)^2 \rangle / (1 - (\lambda^{(-)})^2) \quad (2.44)$$

が得られる。ただし、 $\langle f_l \rangle = 0$  の仮定を使った。

さらに、(2.27) より  $x_l = y_l^{(1)} + y_l^{(2)}$  と表されるので、(2.42), (2.43), (2.44) に (2.6), (2.23), (2.25), (2.28), (2.29) を代入することで、 $\alpha^2 - 4\omega^2 > 0$  の場合には、

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle_{eq} &= \langle (y^{(1)})^2 \rangle_{eq} + 2 \langle y^{(1)} y^{(2)} \rangle_{eq} + \langle (y^{(2)})^2 \rangle_{eq} \\ &= (f^2 / 4k^2 \omega^4 \Delta t_f) \times \{ \\ &\quad (k + \alpha)^2 (\exp((k - \alpha) \Delta t_f / 2) - 1)^2 / (1 - \exp((k - \alpha) \Delta t_f)) \} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -8\omega^2(\exp((k-\alpha)\Delta t_f/2) - 1)(\exp((-k-\alpha)\Delta t_f/2) - 1)/(1 - \exp(-\alpha\Delta t_f)) \\
& +(\alpha-k)^2(\exp((-k-\alpha)\Delta t_f/2) - 1)^2/(1 - \exp((-k-\alpha)\Delta t_f)) \} \quad (2.45)
\end{aligned}$$

が得られ、 $\alpha^2 - 4\omega^2 < 0$  の場合には、

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle_{eq} &= (f^2/2\omega^2 k^2 \Delta t_f) \times \{ \\
& A/(1 + \exp(-\alpha\Delta t_f) + 2\exp(-\alpha\Delta t_f/2) \cos(k\Delta t_f/2)) \\
& + B/(1 - \exp(-\alpha\Delta t_f)) \} \quad (2.46)
\end{aligned}$$

が得られる。ただしここで、

$$A = (k^2 - \alpha^2)(1 - \exp(-\alpha\Delta t_f)) - 4k\alpha \exp(-\alpha\Delta t_f/2) \sin(k\Delta t_f/2) \quad (2.47)$$

$$B = -4\omega^2(-\exp(-\alpha\Delta t_f) + 2\exp(-\alpha\Delta t_f/2) \cos(k\Delta t_f/2) - 1) \quad (2.48)$$

と定義した。

これら (2.45) と (2.46) が外力のみが揺らぐ場合の 2 次モーメントの表式である。これらを調べるために  $\Delta t_f$  が微小な場合を考えてみる。これは外力が連続的なホワイトノイズに近い場合に対応する。

$$(e^{-A\Delta t_f} - 1)(e^{-B\Delta t_f} - 1)/(e^{-C\Delta t_f} - 1) \simeq AB\Delta t_f/C + \{AB - (BA^2 + AB^2)/C\} \Delta t_f^2/2. \quad (2.49)$$

のような近似式を使うと、

$$\langle x^2 \rangle_{eq} = f^2/2\alpha\omega^2 + o(\Delta t_f^2) \quad (2.50)$$

を得る。この表式は Uhlenbeck と Ornstein が得た表式と一致している [8, 67]。したがって、ここでは外力のみが揺らぐ場合の 2 次のモーメントの平衡値の本研究の方法による再導出が行われたことになる。さらに、表式 (2.50) は  $\Delta t_f$  の 2 次のオーダーになっていることにも注意したい。このことは、 $\Delta t_f$  が小さい時、2 次モーメントの平衡値は  $\Delta t_f$  の大きさに敏感でないことを示している。すなわち外力ゆらぎに微小な時間相関が存在しても 2 次モーメントはそれ程影響されないということである。



### 2.3.2 時間相関のない振動数ゆらぎの場合

次に  $\omega^2(t)$  が階段関数的に変化するが、各時間間隔の  $\omega^2(t)$  に相関がない時を考える。(2.40) 式において、左から  $U_{n+1}$  をかけ、また  $\begin{pmatrix} \Lambda_n^{(+)} & 0 \\ 0 & \Lambda_n^{(-)} \end{pmatrix}$  と  $\mathbf{Y}_{n-1}$  の間に  $U_n^{-1}U_n$  をはさむことにより、次式が得られる。ただし、(2.38) 式により変数を  $\mathbf{X}_n$  になおした。

$$\begin{pmatrix} X_n \\ \dot{X}_n \end{pmatrix} = L_n \begin{pmatrix} X_{n-1} \\ \dot{X}_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{F}_n^{(1)} \\ \tilde{F}_n^{(2)} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

ただし、

$$\begin{aligned} L_n &= U_n \Lambda_n U_n^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (\alpha + k_n)\Lambda_n^{(1)}/2k_n + (-\alpha + k_n)\Lambda_n^{(1)}/2k_n & \Lambda_n^{(1)}/k_n - \Lambda_n^{(2)}/k_n \\ -\omega_n^2\Lambda_n^{(1)}/k_n + \omega_n^2\Lambda_n^{(2)}/k_n & (\alpha - k_n)\Lambda_n^{(1)}/2k_n + (\alpha + k_n)\Lambda_n^{(1)}/2k_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\Lambda_n \equiv \begin{pmatrix} \lambda_n^{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_n^{(2)} \end{pmatrix}^m \quad (2.53)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_n \equiv U_n \mathbf{F}_n \quad (2.54)$$

とおいた。

この式で各成分を2乗し、そのあと平均をとることを試みる。この時次の3つの事実に注意する。まず、 $\mathbf{X}_n$  は未来の外力ゆらぎや振動数ゆらぎに依存しないので  $\mathbf{X}_n$  と  $L_n$  の各成分、または  $\mathbf{X}_n$  と  $\mathbf{F}_n$  の各成分は互いに統計的に独立である。次に、外力ゆらぎや振動数ゆらぎは互いに相関がないという仮定より、 $\mathbf{F}_n$  と  $L_n$  の各成分は統計的に独立である。最後に、(2.36) 式と (2.37) 式は外力ゆらぎの和の形になっているから、 $\langle \mathbf{F}_n \rangle = 0$  である。これらの事実を用いて、次式を得る。

$$\begin{pmatrix} \langle X_n^2 \rangle \\ \langle X_n \dot{X}_n \rangle \\ \langle \dot{X}_n^2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle (L_n^{(11)})^2 \rangle & 2\langle L_n^{(11)}L_n^{(12)} \rangle & \langle (L_n^{(12)})^2 \rangle \\ \langle L_n^{(11)}L_n^{(21)} \rangle & \langle L_n^{(12)}L_n^{(21)} + L_n^{(11)}L_n^{(22)} \rangle & \langle L_n^{(12)}L_n^{(22)} \rangle \\ \langle (L_n^{(21)})^2 \rangle & 2\langle L_n^{(21)}L_n^{(22)} \rangle & \langle (L_n^{(22)})^2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle X_{n-1}^2 \rangle \\ \langle X_{n-1}\dot{X}_{n-1} \rangle \\ \langle \dot{X}_{n-1}^2 \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle (\tilde{F}_n^{(1)})^2 \rangle \\ \langle \tilde{F}_n^{(1)}\tilde{F}_n^{(2)} \rangle \\ \langle (\tilde{F}_n^{(2)})^2 \rangle \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

$$\equiv \mathcal{L}_n \vec{\mathcal{X}}_n + \mathcal{F}_n \quad (2.56)$$



この操作は (2.40) 式には適用できない。なぜなら、定義 (2.38) からみて、 $\mathbf{Y}_{n-1}$  と  $U_n$  や  $\Lambda_n$  は独立とはいえないからである。

いま、2 次モーメントの平衡値を求めたいので、十分大きな  $n$  に対し、

$$\begin{pmatrix} \langle X_n^2 \rangle \\ \langle X_n \dot{X}_n \rangle \\ \langle \dot{X}_n^2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle X_{n-1}^2 \rangle \\ \langle X_{n-1} \dot{X}_{n-1} \rangle \\ \langle \dot{X}_{n-1}^2 \rangle \end{pmatrix} \equiv \mathcal{X}_{eq} \quad (2.57)$$

のように仮定、また  $\mathcal{X}_{eq}$  を定義する。これを (2.56) に代入すると、 $\mathcal{X}_{eq}$  の表式が次のように得られる。

$$\mathcal{X}_{eq} = (I - \mathcal{L})^{-1} \mathcal{F} \quad (2.58)$$

ただし、ゆらぎの定常性を考慮して添え字  $n$  は省略した。これが、本論文で導入された離散時刻上で変化する振動数ゆらぎに時間相関がない ( $\omega_n^2$  がそれぞれ統計的に独立であるということ。2.2 節の最初参照) 仮定のもとで、一般的に成り立つ 2 次モーメントの平衡値の厳密な表式である。

しかし、ここではこの結果を簡単に調べるために、次のような 2 値しかとらない振動数ゆらぎを導入して平均操作を行うことにしよう。

$$\omega_0^2(1 \pm \epsilon) \quad (2.59)$$

ただし、この 2 つの値は等確率で実現するとする。この仮定のもとでは振動数ゆらぎに関する平均は、 $\omega_0^2(1 \pm \epsilon)$  に対応する 2 つの量の和を 2 で割るという単純な計算となる。

まず (2.58) 式における  $\mathcal{F}$  の各成分について考える。いま、2.2 節の最初に述べたように外力ゆらぎ  $f_l$  と  $\omega_n^2$  は統計的に独立であると仮定されているので、 $f_l$  に関する平均のみを先に行うことができる。従って、 $f_l$  に関する平均のみについては、 $\mathcal{F}$  の計算は (2.42)、(2.43)、(2.44) を導いた時と同様に実行できる。さらに前小節のように  $\Delta t_f$  が非常に小さいとして、近似式 (2.49) の一項目のみを考慮すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(1)} &= f^2 \langle (k_n + \alpha)(1 - (\Lambda_n^{(1)})^2)/4k_n^2\omega_n^2 \rangle - 2f^2 \langle (1 - \Lambda_n^{(1)}\Lambda^{(2)})/k_n^2\alpha \rangle \\ &+ f^2 \langle (-k_n + \alpha)(1 - (\Lambda^{(2)})^2)/4k^2\omega_n^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(2)} &= -f^2 \langle (1 - (\Lambda_n^{(1)})^2)/2k_n^2 \rangle + f^2 \langle (1 - \Lambda_n^{(1)}\Lambda^{(2)})/k_n^2 \rangle \\ &- f^2 \langle (1 - (\Lambda^{(2)})^2)/2k^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.61)$$



$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{(3)} = & f^2 \left\langle (\alpha - k_n)(1 - (\Lambda_n^{(1)})^2)/4k_n^2 \right\rangle - 2f^2 \left\langle \omega_n^2(1 - \Lambda_n^{(1)}\Lambda_n^{(2)})/k_n^2 \alpha \right\rangle \\ & + f^2 \left\langle (k_n + \alpha)(1 - (\Lambda_n^{(2)})^2)/4k_n^2 \right\rangle\end{aligned}\quad (2.62)$$

ただし、この式の平均操作は振動数ゆらぎに関するものを意味している。

次に (2.58) 式における  $(I - \mathcal{L})^{-1}$  の各成分について考える。 $L_n$  の定義 (2.52) を代入してわかるように、この行列の各成分は振動数ゆらぎにしか依存していないので、上述のように、 $\omega_0^2(1 \pm \epsilon)$  に対応する 2 つの量の和を 2 で割るという単純な計算を行うだけで平均操作が行える。

このようにして得られた 2 次モーメントの平衡値 (2.58) の具体形を、 $\Delta t_\omega$  と  $\epsilon$  に関してプロットしたものが図. 2.3 である。ただし図. 2.3 ではパラメタを  $\alpha = 1.2, \omega_0 = 4, f^2 = 1$  と選んでいる。このグラフから、 $\Delta t_\omega$  の大きさがある区間にあり、なおかつ  $\epsilon$  がある閾値をこえると、2 次モーメントの平衡値が発散してしまう様子がうかがえる。以下、この閾値を  $\epsilon_c$  と書くことにする。

この発散の性質は、第 1 章で紹介した、Bourret や B.J.West の得た特別な場合の厳密な結果と類似している。ただそれらの結果によると、2 次モーメントの平衡値は、(2.2) 式で紹介したように ' $\omega = \text{一定}$ ' の場合 [8] に類似した非常にきれいな表式として得られている。一方本論文の方法の結果 (2.58) は、かなり込み入った表式になっている。従って  $\epsilon_c$  のあらわな表式を得るのは困難である。しかしながら、本論文の結果の場合、2 次モーメントの発散の条件として行列式  $|I - \mathcal{L}|$  がゼロとなること、

$$|I - \mathcal{L}| = 0 \quad (2.63)$$

が考えられる。なぜなら、一般に逆行列の性質から (2.58) 中の逆行列部分の分母が行列式  $|I - \mathcal{L}|$  で与えられると考えられるからである。

このことは、実際、行列式  $|I - \mathcal{L}|$  を  $\epsilon$  に関してグラフ化するとわかりやすい。図. 2.4 は  $\alpha = 1.2$  と  $\omega_0 = 4$  の条件で、 $\epsilon = 0.5, 0.88$  のそれぞれの場合の行列式  $|I - \mathcal{L}|$  を、 $\Delta t_\omega$  に関してプロットしたものである。両者とも、 $\Delta t_\omega$  の増加に対して振動しているが、 $\epsilon$  の大きい方がその振動が激しくなり、ついには  $|I - \mathcal{L}|$  が負の値を取りうる程になる。この時の実際の 2 次モーメントの平衡値をプロットしたものが、図. 2.5 と 図. 2.6 である。これらのグラフは、図. 2.3 で  $\epsilon = 0.5, 0.88$  それぞれの場合に対して断面をとったものに対応する。2 次のモーメ



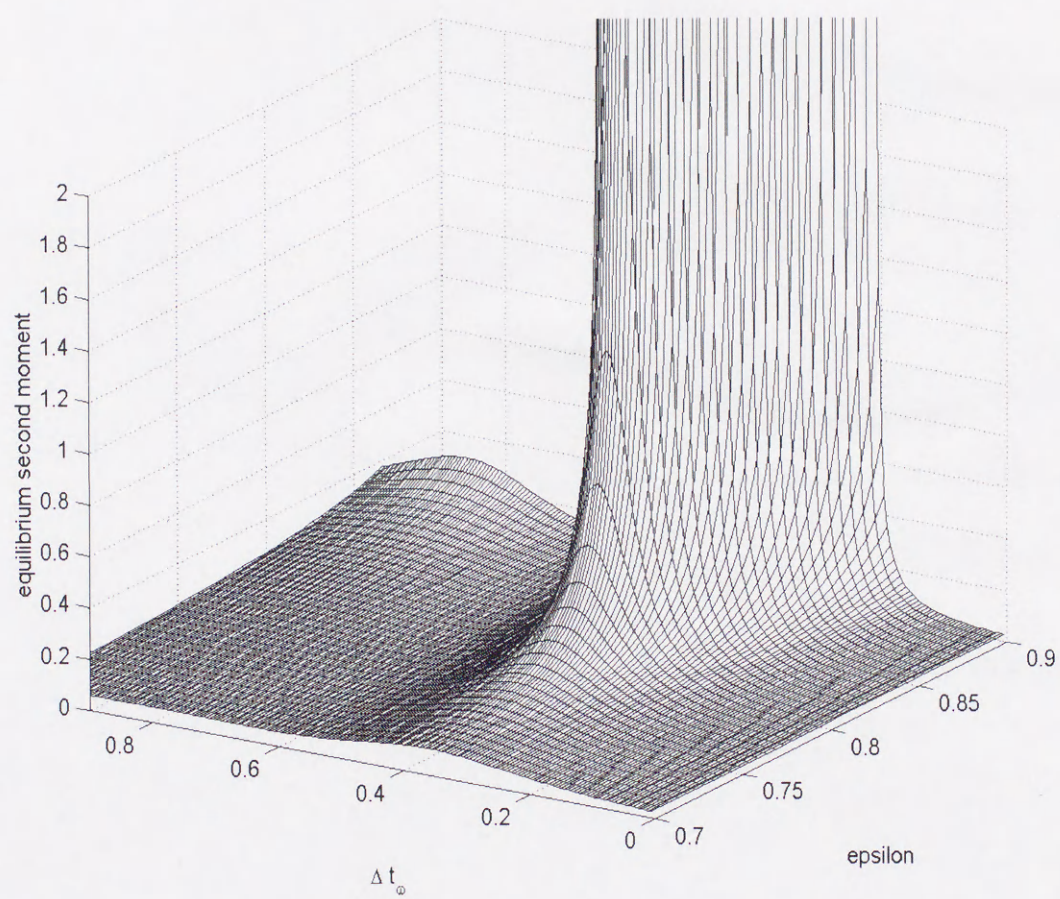


図. 2.3:  $\alpha = 1.2, \omega_0 = 4, f^2 = 1$  の時の 2 次モーメントの平衡値の振る舞い。振動数ゆらぎの時間相関長  $\Delta t_w$  が適当な範囲にあると、振動数ゆらぎの大きさ  $\epsilon$  がある値を越えた時 2 次モーメントが発散する。



ントは負には成り得ないので、負の領域は意味のないものと考えられるが、負の領域と正の領域との境界で2次モーメントが発散している様子がよくわかる。図. 2.4 と図. 2.5 を比べればわかるように、 $|I - \mathcal{L}|$  がゼロとなる点で2次モーメントは発散している。このようなグラフからも、 $|I - \mathcal{L}|$  のゼロ点が2次モーメントの発散を示す臨界点であることが読み取れる。

しかしながら、このような発散の性質が生じないこともあることに注意したい。というのも、今選んだパラメタでは  $|I - \mathcal{L}|$  は  $\Delta t_\omega$  の増加に関して振動していたが、 $\alpha$  や  $\omega_0$  の選び方によってはこのような振動がない場合もある。そのような場合には、2次のモーメントの発散も起こり得ない。

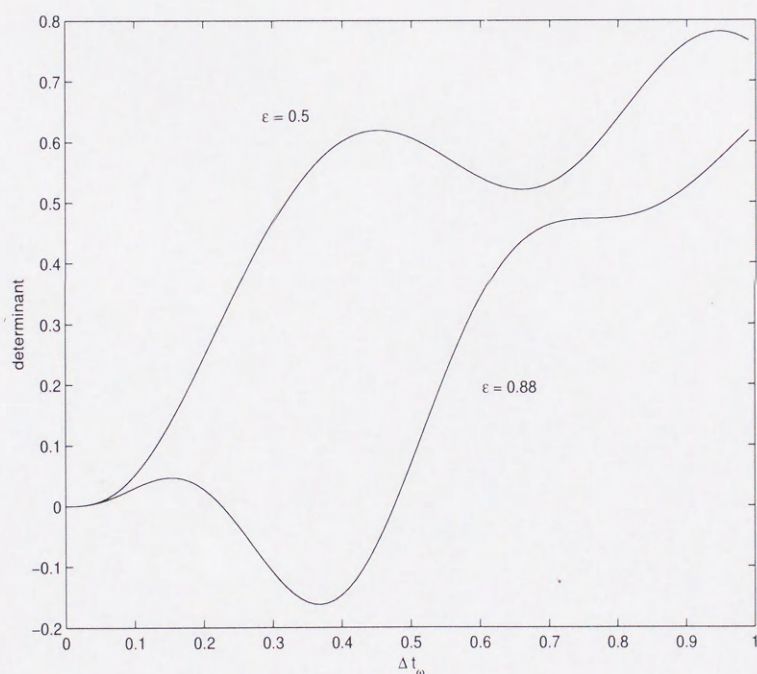


図. 2.4:  $\alpha = 1.2$  と  $\omega_0 = 4$  の条件で、振動数ゆらぎの大きさ  $\epsilon = 0.5, 0.88$  のそれぞれの場合の行列式  $|I - \mathcal{L}|$  を、 $\Delta t_\omega$  に関してプロットしたもの

(2.58) 式から読み取れることを、もう一つ言及しておく。それは  $\Delta t_\omega \simeq 0$  の場合と  $\Delta t_\omega \rightarrow \infty$  の場合の極限形に関することである。 $\Delta t_\omega \simeq 0$  の場合、やっかいな Taylor 展開の計算を経て、

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle_{eq} &= f^2 / (2\alpha \langle \omega^2 \rangle) \\ &+ f^2 \{ (-9/4 \langle \omega^2 \rangle) + (\langle \omega^4 \rangle + 3 \langle \omega^2 \rangle^2 - 3\alpha^2 \langle \omega^2 \rangle) / \alpha \langle \omega^2 \rangle \} \Delta t_\omega + o((\Delta t_\omega)^2) \end{aligned}$$



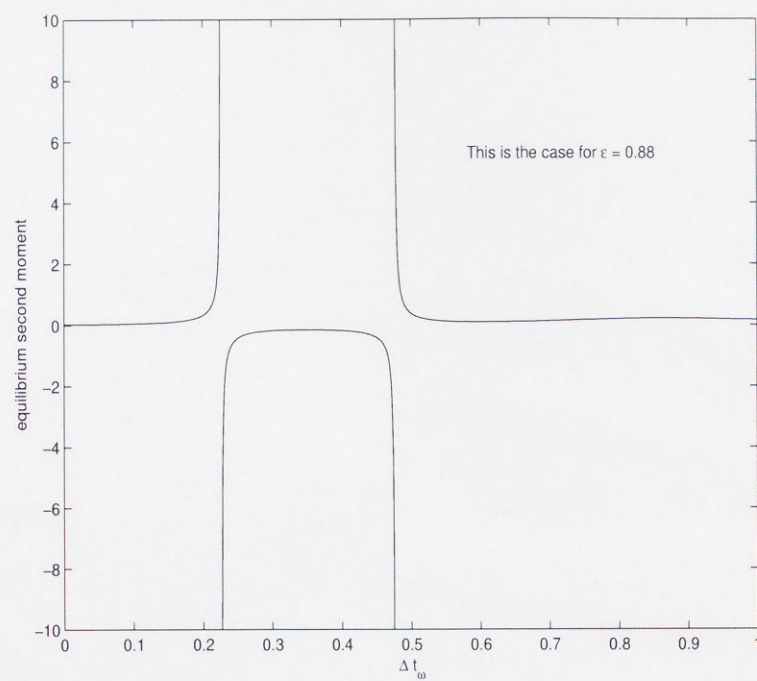


図. 2.5: 図. 2.4 の  $\epsilon = 0.88$  の場合に対応した 2 次モーメントの振る舞い。行列式  $|I - \mathcal{L}|$  が負になる点で発散している。

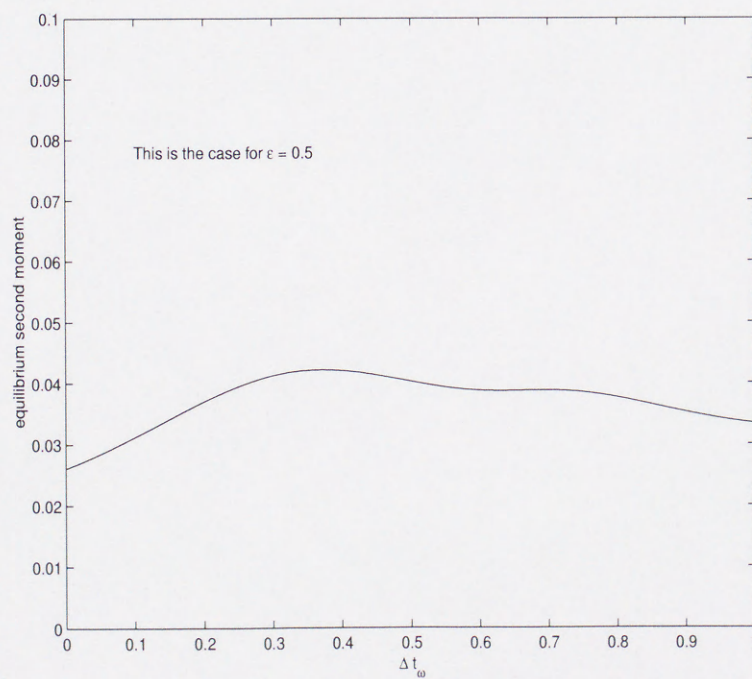


図. 2.6: 図. 2.4 の  $\epsilon = 0.5$  に対応した 2 次モーメントの振る舞い。発散は見られない。



(2.64)

が得られる。この第一項は、振動数が揺らがない場合の結果 (2.50) 式で  $\omega^2$  のところを  $\langle \omega^2 \rangle$  で置き換えたものになっている。このことは、振動数ゆらぎの変化する頻度があまりに高いと、振動子の変位は振動数が揺らいでいることを感知せず、'  $\omega = \text{一定}$  ' の場合と同じ結果になってしまうことを示している。

一方、 $\Delta t_\omega \rightarrow \infty$  の場合は、 $\Lambda^{(\pm)} = 0$  となることを考慮すると、 $L_n$  は単位行列になり、あとは (2.61) 式の計算から、

$$\langle x^2 \rangle_{eq} \simeq f^2 \langle 1/2\alpha\omega^2 \rangle \quad (2.65)$$

が得られる。実は、この結果は予想されたものである。というのも  $\Delta t_\omega$  が大きいと、2 次モーメントは振動数が変化する間もなく振動数ゆらぎのない場合の平衡値  $f^2/2\alpha\omega^2$  に達してしまうので、振動数ゆらぎの結果としての 2 次モーメントの値としては、 $f^2/2\alpha\omega^2$  の平均が得られるはずだからである。

## 2.4 有色な振動数ゆらぎの場合の 2 次モーメントの近似的導出

前節ではゆらぎに時間相関がないことを仮定することで、正確な 2 次モーメントの平衡値を議論することができた。しかしながら時間相関のあるゆらぎの場合、平均操作は非常に込み入ったものになってしまう。ここでは 2.2 節中 (2.41) 式の説明で指摘した、 $k_n$  と  $k_{n+1}$  の差が小さいと  $U_{n+1}^{-1}U_n$  は単位行列に近いという事実を利用して、振動数ゆらぎに時間相関がある場合の近似計算を行う。

### 2.4.1 $U_{n+1}^{-1}U_n$ の非対角項による展開

ここでもう一度、(2.40) 式に戻る。これは対角化されていないので各成分を直接和の形で書けないが、行列を用いて次のように書ける。

$$\mathbf{Y}_n = \prod_{j=1}^n (M_{j+1}\Lambda_j) \mathbf{Y}_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{i=0}^{j-1} (M_{n-i+1}\Lambda_{n-i}) M_{n-j+1} \mathbf{F}_{n-j} + M_{n+1} \mathbf{F}_n \quad (2.66)$$

ただし、

$$M_{n+1} \equiv U_{n+1}^{-1}U_n \quad (2.67)$$



とおいた。ここで次のように行列  $G(n, n-l)$  を定義する。

$$G(n, n-l) \equiv \begin{cases} \prod_{i=0}^{l-1} (M_{n-i+1} \Lambda_{n-i}) & l \neq 0 \text{ の時} \\ 1 & l = 0 \text{ の時} \end{cases} \quad (2.68)$$

この  $G(n, n-l)$  を用いて  $\mathbf{Y}_n$  を書きなおすと、

$$\mathbf{Y}_n = G(n, 0) \mathbf{Y}_0 + \sum_{j=0}^{n-1} G(n, n-j+1) M_{n-j+1} \mathbf{F}_{n-j} \quad (2.69)$$

この表式をみると、区間  $n$  より  $j$  だけ前の外力ゆらぎ  $\mathbf{F}_{n-j}$  の影響が、 $G(n, n-j)$  との積によって表され、その  $j$  に関する総和が  $\mathbf{Y}_n$  を決めている。 $G(n, n-l)$  はいわゆる Green 関数である。しかし、 $G(n, n-j)$  はランダムな非対角行列の積であり簡単なものではない。

そこで、行列  $M_n$  が振動数ゆらぎが十分小さければ単位行列に近いということを思い出し、 $G(n, n-j)$  の各成分を  $M_n$  の非対角成分の低次からなる項だけで近似することを試みる。

一般に 2 行 2 列の行列  $A, B, C$  の積を成分を用いて書くと、1 行 1 列成分は、

$$\{ABC\}_{11} = \sum_{ij} A_{1i} B_{ij} C_{j1} \quad (2.70)$$

である。この右辺の項のうち、行列  $A, B, C$  のいずれかの非対角成分の一次式になっているものはない。一方、1 行 2 列成分は、

$$\{ABC\}_{12} = \sum_{ij} A_{1i} B_{ij} C_{j2} \quad (2.71)$$

だが、この式からわかるように行列  $A, B, C$  のいずれかの非対角成分の最低次は一次である。このような考察から、 $G(n, n-j)$  を  $M$  の非対角成分の一次式で近似すると、

$$G(n, n-l) \simeq$$

$$\left( \frac{\prod_{i=0}^{l-1} (M_{n-i+1}^{(11)} \Lambda_{n-i}^{(1)})}{\sum_j (M_{n+1}^{(22)} \Lambda_n^{(1)}) \cdots (M_j^{(21)} \Lambda_{j-1}^{(1)}) \cdots (M_{n+1}^{(11)} \Lambda_{n-l+1}^{(1)})} \frac{\sum_j (M_{n+1}^{(11)} \Lambda_n^{(1)}) \cdots (M_j^{(12)} \Lambda_{j-1}^{(2)}) \cdots (M_{n+1}^{(22)} \Lambda_{n-l+1}^{(2)})}{\prod_{i=0}^{l-1} (M_{n-i+1}^{(22)} \Lambda_{n-i}^{(2)})} \right) \quad (2.72)$$

となることがわかる。

ここで、計算を 2 次のモーメントだけでなく  $p$  次 ( $p$  は整数) のモーメントを求めることも視野に入れて  $(X_n)^p$  を考えてみる。(2.38) 式の逆変換に (2.69) を代入することにより、

$$(X_n)^p = (Y_n^{(1)} + Y_n^{(2)})^p$$



$$\begin{aligned}
= & \left( \sum_{j=0}^{n-1} G^{(11)}(n, n-j+1) (M_{n-j+1}^{(11)} F_{n-j}^{(1)} + M_{n-j+1}^{(12)} F_{n-j}^{(2)}) \right. \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} G^{(12)}(n, n-j+1) (M_{n-j+1}^{(21)} F_{n-j}^{(1)} + M_{n-j+1}^{(22)} F_{n-j}^{(2)}) \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} G^{(21)}(n, n-j+1) (M_{n-j+1}^{(11)} F_{n-j}^{(1)} + M_{n-j+1}^{(12)} F_{n-j}^{(2)}) \\
& \left. + \sum_{j=0}^{n-1} G^{(22)}(n, n-j+1) (M_{n-j+1}^{(21)} F_{n-j}^{(1)} + M_{n-j+1}^{(22)} F_{n-j}^{(2)}) \right)^p \quad (2.73)
\end{aligned}$$

が得られる。ただし、平衡状態におけるモーメントを求めるのが目的なので、初期条件に関する項は無視した。

ここで、一般に  $f_n$  を行列  $M$  の非対角項を含まない数式、 $g_n$  を行列  $M$  の非対角項の一次式とする ( $n$  は時刻を表す添え字) と、

$$(f_n + g_n + o(M^{(12)} + M^{(21)}))^p \simeq f_n^p + p f_n g_n \quad (2.74)$$

が成り立つ。そこで、(2.73) 式にこの近似を適用すれば、 $G(n, n-j+1)$  の近似式 (2.72) で各成分が  $M$  の非対角項の何次式になっているか注意して、 $f$ 、 $g$  にあたるのはそれぞれ、

$$f_n = \sum_{j=0}^{n-1} G^{(11)}(n, n-j+1) M_{n-j+1}^{(11)} F_{n-j}^{(1)} + \sum_{j=0}^{n-1} G^{(22)}(n, n-j+1) M_{n-j+1}^{(22)} F_{n-j}^{(2)} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned}
g_n = & \sum_{j=0}^{n-1} G^{(11)}(n, n-j+1) M_{n-j+1}^{(12)} F_{n-j}^{(2)} \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} G^{(12)}(n, n-j+1) M_{n-j+1}^{(22)} F_{n-j}^{(2)} \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} G^{(21)}(n, n-j+1) M_{n-j+1}^{(11)} F_{n-j}^{(1)} \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} G^{(22)}(n, n-j+1) M_{n-j+1}^{(21)} F_{n-j}^{(1)} \quad (2.76)
\end{aligned}$$

であることがわかる。

このように、 $(X_n)^p$  を2つのモードの影響の度合いを表す行列  $M$  の非対角成分で展開することができた。次にこの表式に平均操作をとることを試みる。



## 2.4.2 キュムラントの導入

とりあえず、一般の  $p$  次モーメントの計算はかなりやっかいなので、2 次モーメントに関して考える。最初に (2.74) 式の 1 項目、すなわち、(2.75) 式の 2 乗の平均をとる。この計算は 2 つの減衰モードが影響しあうことを無視した近似式といえる。(2.75) から、一般には、

$$f^2 = \sum_{q=0}^2 {}_2C_q \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=q}^{n-1} \sum_{\tilde{j}_1=0}^{n-1} \sum_{\tilde{j}_q=0}^{n-1} \prod_{l=1}^{2-q} \left( G^{(11)}(n, n - j_l + 1) M_{n-j_l+1}^{(11)} F_{n-j_l}^{(1)} \right) \prod_{l'=1}^q \left( G^{(22)}(n, n - \tilde{j}_{l'} + 1) M_{n-\tilde{j}_{l'}+1}^{(22)} F_{n-\tilde{j}_{l'}}^{(2)} \right) \quad (2.77)$$

この式には 3 種の  $G$  の積  $G^{(11)}G^{(11)}$ 、 $G^{(11)}G^{(22)}$ 、 $G^{(22)}G^{(22)}$  が現れるが、考え方は同様なので代表して  $G^{(11)}G^{(11)}$  に着目する。 $G$  の近似式 (2.72) に、(2.23)、(2.35)、(2.41) を代入することにより、

$$G^{(11)}(n, n - j_l + 1) = \exp \left\{ -\frac{(\alpha - k_0)\Delta t_\omega}{2} \right\} \exp \left( \sum_{m=1}^{j_l+1} \Delta k_{n-m+1} \Delta t_\omega / 2 + \sum_{m=1}^{j_l+1} \ln (k_{n-m+2} + k_{n-m+1} / 2k_{n-m+2}) \right) \quad (2.78)$$

が得られる。ただし、ここで時刻  $n - m + 1$  における  $k_{n-m+1}$  の平均値 (定数) を  $k_0$ 、平均値からのずれ (確率変数) を  $\Delta k_{n-m+1}$  とおいた。したがって、

$$k_{n-m+1} = k_0 + \Delta k_{n-m+1} \quad (2.79)$$

となっている。

指数の肩は振動数ゆらぎに関する量の和になっており、全て小さいと仮定されている。したがって、平均操作にキュムラント有限次近似が有効と考えられる (付録 B 参照)。しかし、(2.77) では  $F_{n-j}$  がかかっており、これを無理に指数関数にしても指数の肩は微小にはならず、キュムラント有限次近似は使いにくい。そこで、平均をとる際、最初に  $F_{n-j}$  を決めた上での条件付確率で平均をとり、そのあと、 $F_{n-j}$  に関しての平均をとることにする。さらに対数の部分を、次のように  $\Delta k$  のべきで展開する。

$$\ln (k_{n-l+1} + k_{n-l} / 2k_{n-l+1}) \simeq (\Delta k_{n-l} - \Delta k_{n-l+1}) / 2k_0$$



$$+ (3\Delta k_{n-l+1}^2 - \Delta k_{n-l}^2 - 2\Delta k_{n-l+1}\Delta k_{n-l})/8k_0^2 \quad (2.80)$$

こうしてから、(2.77) の和のうちのひとつの項に着目して、 $F$  以外の部分に上述の条件付の平均操作をほどこし、さらにキュムラントの2次で近似してみると、

$$\begin{aligned} & \langle G^{(11)}(n, n-j_1+1)G^{(11)}(n, n-j_2+1)M_{n-j_1}^{(11)}M_{n-j_2}^{(11)} \rangle \\ & \simeq \exp\left(-\frac{(\alpha-k_0)\Delta t_\omega j_1}{2} - \frac{(\alpha-k_0)\Delta t_\omega j_2}{2}\right) \\ & < \exp\left(\sum_{l=1}^{j_1} \frac{\Delta k_{n-j_1+l}\Delta t_\omega}{2} + \frac{\Delta k_{n-j_1+l} - \Delta k_{n-j_1+l+1}}{2k_0} + \frac{3\Delta k_{n-j_1+l+1}^2 - \Delta k_{n-j_1}^2 - 2\Delta k_{n-j_1+1}\Delta k_{n-j_1}}{8k_0^2}\right) \\ & \exp\left(\sum_{l=1}^{j_2} \frac{\Delta k_{n-j_2+l}\Delta t_\omega}{2} + \frac{\Delta k_{n-j_2+l} - \Delta k_{n-j_2+l+1}}{2k_0} + \frac{3\Delta k_{n-j_2+l+1}^2 - \Delta k_{n-j_2}^2 - 2\Delta k_{n-j_2+1}\Delta k_{n-j_2}}{8k_0^2}\right) > \\ & \simeq \exp\left(-\frac{(\alpha-k_0)\Delta t_\omega j_2}{2} - \frac{(\alpha-k_0)\Delta t_\omega j_2}{2}\right) \\ & \exp\left(\left\langle \frac{\sum_{l=1}^{j_1} \Delta k_{n-j_1+l}\Delta t_\omega \sum_{l=1}^{j_2} \Delta k_{n-j_1+l}\Delta t_\omega}{8} + \sum_{l=1}^{j_1} \frac{3\Delta k_{n-j_1+l+1}^2 - \Delta k_{n-j_1}^2 - 2\Delta k_{n-j_1+1}\Delta k_{n-j_1}}{8k_0^2} + \dots \right\rangle\right) \end{aligned} \quad (2.81)$$

となる。ここで、ガウス過程の場合キュムラントの3次以上は消えるので、この操作は近似でなくなることに注意したい。

指数関数の肩には様々な和が現れることになるが、それは次のような見積もりにより簡単化される。

$$\left\langle \sum_{l=1}^j \Delta k_{n-j+l}\Delta t_\omega \sum_{l=1}^j \Delta k_{n-j+l}\Delta t_\omega \right\rangle \simeq j \langle \Delta k^2 \rangle \Delta t_\omega^2 + j\kappa \Delta t_\omega^2/2 \quad (2.82)$$

ここで、

$$\kappa = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \Delta k_0 \Delta k_i \rangle \quad (2.83)$$

とおいた。ただし、やはり (2.82) 式も見積もりに過ぎない。なぜなら、(2.82) のようにクロスタームを  $\kappa$  を用いて表すためには、(2.82) 式における  $j$  が十分に大きくなければならないからである。一般にはこれらクロスタームを正確に扱うことは難しいが、ここでは  $\langle \Delta k_0 \Delta k_i \rangle$  が  $i$  に対して十分早く減衰するとして (2.82) を採用する。

上述の平均は  $F_{n-j}$  をある値に決めた条件下での平均操作であったことにも注意せねばならない。 $F_{n-j}$  を決めた上での条件付確率は当然  $F_{n-j}$  に依存するので、その依存の仕方を正確に取り入れるのは困難である。そこで、条件付の平均を条件なしの平均操作でおきかえると



いう近似で計算する。つまり (2.77) の平均を、

$$\begin{aligned} \langle f^2 \rangle = & \sum_{q=0}^2 {}_2C_q \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2-q=0}^{n-1} \sum_{\tilde{j}_1=0}^{n-1} \sum_{\tilde{j}_q=0}^{n-1} \\ & \left\langle \prod_{l=1}^{2-q} \prod_{l'=1}^q G^{(11)}(n, n-j_l) M_{n-j_l+1}^{(11)} G^{(22)}(n, n-\tilde{j}_{l'}) M_{n-\tilde{j}_{l'}+1}^{(22)} \right\rangle \langle F_{n-j_l}^{(1)} F_{n-\tilde{j}_{l'}}^{(2)} \rangle \quad (2.84) \end{aligned}$$

と考えるのである。一般的にいうと、この近似は  $\Delta k_n$  の時間相関長が長くなるに従い正当性が失われる。ただし、振動数ゆらぎとして2値マルコフ過程を採用すると、この操作が近似ではなくなることに注意したい [53]。さらにいま、初期時間から十分時間が経っている状況 ( $n$  が十分に大きい状況) で計算しているので、式 (2.78) 式の  $\Delta k$  のうちの殆どは時刻  $n-j$  から時間が経っているので  $F_{n-j}$  の影響を受けないと期待される。ともかく、以下この近似によってさらに計算を進めることにする。

最初に仮定したように、外力ゆらぎと振動数ゆらぎは独立なので、外力に関する平均操作のみを先に行うことができる。いま外力を含んでいるのは  $F_{n-j}$  のみであり、さらに外力には時間相関がないことを考慮すると、平均をとる際同じ時刻の添え字を持った  $F_{n-j}$  の積以外は消えてしまう。従って同じ時刻の添え字を持った  $F_{n-j}$  の積のみに注目すればよい。その具体的計算は、(2.36), (2.37) 式より、

$$\langle F_{n-j}^{(1)} F_{n-j}^{(1)} \rangle = \left\langle \frac{1 - \exp - (\alpha - k_{n-j}) \Delta t_\omega}{k_{n-j}^2 (\alpha - k_{n-j})} \right\rangle f^2 \quad (2.85)$$

$$\langle F_{n-j}^{(1)} F_{n-j}^{(2)} \rangle = - \left\langle \frac{1 - \exp - \alpha \Delta t_\omega}{k_{n-j}^2 \alpha} \right\rangle f^2 \quad (2.86)$$

$$\langle F_{n-j}^{(2)} F_{n-j}^{(2)} \rangle = \left\langle \frac{1 - \exp - (\alpha + k_{n-j}) \Delta t_\omega}{k_{n-j}^2 (\alpha + k_{n-j})} \right\rangle f^2 \quad (2.87)$$

となる。

次に (2.74) 式の2項目、すなわち、(2.75) と (2.76) の積の平均をとる。この計算は2つの減衰モードの影響の仕合を、過去の  $\omega$  の変動時中から一度だけ考慮したものである。(2.75) と (2.76) の表式に注意し、それらの積をつくると、積の種類が8種類現れる。例えば、

$$\langle G^{(11)}(n, n-j+1) G^{(12)}(n, n-\tilde{j}+1) M_{n-j}^{(11)} M_{n-\tilde{j}}^{(22)} \rangle \quad (2.88)$$

のような項が現れる和である。



この平均をとる際にもキュムラント展開を用いたいのだが、定義式 (2.72) を見ると  $G^{(12)}$  の表式が、

$$\begin{aligned}
 G^{(12)}(n, n - \tilde{j}) &= \sum_j (M_{n+1}^{(11)} \Lambda_n^{(1)}) \cdots (M_j^{(12)} \Lambda_{j-1}^{(2)}) \cdots (M_{n+1}^{(22)} \Lambda_{n-\tilde{j}+1}^{(2)}) \\
 &= \sum_j \exp \left( \sum_m^{j+1} (-\alpha - k_{n-m}) \Delta t_\omega / 2 + \log \frac{k_{n+1-m} + k_{n-m}}{2k_{n+1-m}} \right) \\
 &\quad \frac{k_{n-j} - k_{n-j-1}}{2k_{n-j}} \exp \{ (-\alpha + k_{n-j-1}) \Delta t_\omega / 2 \} \\
 &\quad \exp \left( \sum_{j+2}^{\tilde{j}} (-\alpha + k_{n-m}) \Delta t_\omega / 2 + \log \frac{k_{n+1-m} + k_{n-m}}{2k_{n+1-m}} \right) \quad (2.89)
 \end{aligned}$$

のように、行列  $M$  の非対角項が積の途中で現れるため、単純に指数関数の形に書けないことが難点である。そこで、やはりここでも、都合の良い独立性の仮定を使って近似する。すなわち、

$$\langle G^{(12)}(n, n - \tilde{j}) \rangle = \sum_j \langle (M_{n+1}^{(11)} \Lambda_n^{(1)}) \cdots \rangle \langle (M_j^{(12)}) \rangle \langle \Lambda_{j-1}^{(2)} \cdots (M_{n+1}^{(22)} \Lambda_{n-\tilde{j}+1}^{(2)}) \rangle \quad (2.90)$$

のように考える。このようにしてから、指数関数の平均値には前述したキュムラント近似を実行すればよい。 $F_{n-j}$  の積に関する扱いは前と同様に行える。このような平均操作を別の種類の積の和にも逐一行うことにより近似計算が実行できる。

## 2.5 近似の妥当性

前節で時間相関のある振動数ゆらぎの場合に、平衡分散値を計算するためいくつかの近似を持ち込んだ。それゆえ、その結果はその近似が成り立つ条件下でしか有効でない。そのことを整理するために、まず前節で導入された近似を書き並べてみる。

### 1. 2つのモード間の影響を表す行列 $M$ の非対角項の一次式による近似

Green 関数の近似式 (2.72) を求める際に使ったこの近似は、おおざっぱにいうと、振動数ゆらぎの大きさが小さい場合に使えるものである。この  $M$  の非対角項の一次式による近似は2つの減衰モードが影響し合う瞬間をただ一度しか考慮していない。

### 2. キュムラントの2次近似

(2.81) 式のように、キュムラント展開のうち2次のものだけを取り出した近似である。こ



れもおおざっぱにいうと振動数ゆらぎの大きさが小さい場合に使えるが、前節中でも指摘したように  $\Delta k_n$  がガウス過程の場合には3次以上のキュムラントは全てゼロなので、指数の肩の対数部分以外の扱いについては正確なものである（付録 B 参照）。しかしながら、実際にそれを計算するには、クロスターム（異なる時刻の振動数の積の平均値）を正確に考慮するのが難しく、前節ではそれらを (2.82) 式のように非常に簡単化して取り扱った。(2.82) 式は振動数ゆらぎの時間相関長が短い時に有効であると思われる。

### 3. 外力に起因する量と Green 関数の相関を無視した近似

(2.84) 式で行ったこの近似は、おおまかにいうと、振動数ゆらぎの時間相関長が短い時に妥当である。特に、時間相関が無い時は正確な扱いになる（ただ、その場合そもそも 2.3.2 節の正確な方法が使える）。このような相関を無視する近似は、前節における  $M$  の非対角項の一次式に関する計算でも、(2.90) 式のように、ある時刻の  $M$  の非対角項に対して行った。 $M$  の非対角項の高次を扱うと、この相関の扱い方に関する困難はさらに増してくる。

さて、これらの近似のうち3は、振動数ゆらぎ  $\omega_n^2$  を2値しかとらないマルコフ鎖であると仮定すると、近似でなく正確なものになる [53]。従って、このような特別な振動数ゆらぎの場合を考えるとという立場をとれば、残る主な近似は1の  $M$  の対角項による展開であると考えられる。

そこで、2.3.2 節で求めた正確に解ける場合と、それを敢えて2.4 節で導入した近似法で解いた場合とを比較してみることににより、 $M$  の対角項による展開の意義について考えてみる。図. 2.7 は、パラメタが  $\alpha = 2$ 、 $\omega_0 = 0.75$ 、 $\Delta t_\omega = 0.2$  の場合について、2次モーメントの平衡値をプロットしたものである。小節 2.3.2 の終わりのような議論のもとでこのパラメタでは、振動数ゆらぎ  $\epsilon$  が大きくても2次モーメントは発散しないことがわかっている。したがって、図. 2.7 の 'exact' で示した曲線は小節 2.3.2 の方法で求めた正確な2次モーメントを表すが、振動数ゆらぎが大きくなってもわずかな増加しかみられない。一方、'0 th order approximation'

で示したもの（ゼロ次近似）は (2.41) で定義された  $M$  を単位行列で近似したもの、'first order approximation' で示したものは、前節による行列  $M$  の非対角項の一次のみを考慮した近似（一次近似）である。



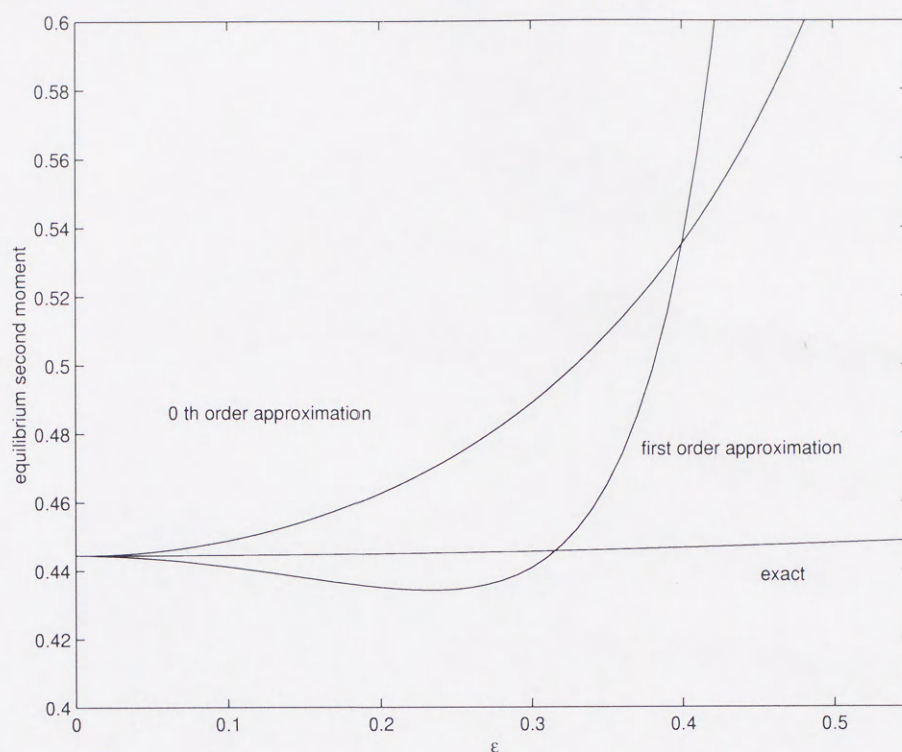


図. 2.7:  $\alpha = 2$ ,  $\omega_0 = 0.75$ ,  $\Delta t_\omega = 0.2$  に対する 2 次モーメントの平衡値の計算。'exact' は厳密解。'0 th order approximation' は行列  $M$  の非対角項のゼロ次近似。'first order approximation' は行列  $M$  の非対角項の一次近似。

振動数ゆらぎが微小な範囲では、3 者ともほぼ一致している。しかし振動数ゆらぎが大きい時、両近似は全く正確ではない。その代わりに、振動数ゆらぎが大きい時に 2 次モーメントが発散するという厳密解でしばしば見られる描像が現れている。2.2 節において、振動数がゆらぐ場合の扱いの理論の困難さは、遷移行列の対角化行列を振動数が変動する度に変更せねばならないことにありと述べた。しかし、その困難点を見逃したゼロ次近似でも、2 次のモーメントが発散の可能性を定性的に表すことがわかる。 $M$  の非対角成分を考慮した方が近似が改善されていることは、 $\epsilon$  が 0 から 0.35 付近にかけては、一次近似の方がより正確であることからわかる。しかしながら、両者とも 2 次モーメントがどこで発散するか、あるいは発散の有無を議論するには全く役に立たない。したがって、そのような目的のためには  $M$  の非対角成分のさらに高次を考慮した近似法を用いねばならないと考えられる。



このように振動数ゆらぎの強度  $\epsilon$  が大きい時には近似の精度が急激にわるくなることがわかる。しかし、このことを逆に解釈すると、 $\epsilon$  の大きさがある程度を越えると急に高次の  $M$  の非対角成分が2次モーメントの値に影響し始めるということも推論できる。言い換えると、上述のような考察から、 $M$  の非対角成分が2次モーメントの発散にいかに関わっているかを議論できるとも考えられるのである。

## 2.6 エネルギー的不安定性

前節までの議論で明らかになったように、振動数と外力の揺らぐ線形な振動子の変位の2次モーメントはある条件下では発散してしまう。このことは振動子の振幅の2乗、すなわちこの体系の持つエネルギーが平均的には発散してしまうことを示している。このことは、エネルギー的不安定性 (Energy instability) として、本研究とは別の振動数ゆらぎの仮定のもとで、これまでも多く報告されている。

このようなエネルギー的不安定性は、外力のみが揺らぐ場合には決して起こらないことに注意したい。というのは、この場合変位が外力ゆらぎの単純な和のような形になるため、中心極限定理より正規分布が得られると考えられるからである。したがって、外力ゆらぎのみの存在下では時間が十分経ったときに振動子と外部体系とのエネルギーのやりとりは平衡状態に達し、なおかつ、変位の確率密度関数は2次モーメントのみで完全に記述される。

一方、振動数と外力の両者が揺らぐ場合、例えばエネルギー的不安定性が生じれば上述のような平衡状態が存在せず、振動子と外部体系とのエネルギーのやりとりの結果正味のエネルギーの流れが生じることは明らかである。よって、エネルギー的不安定性の有無は、エネルギーの流れ方を決める。ただし、エネルギー的不安定性が生じない条件下でもエネルギーのゆらぎそのものが発散する、すなわち4次モーメントが発散することがあり得ることに注意したい。エネルギー的不安定性が生じる以前にも、外力のみが揺らぐ場合と振動数と外力の両者が揺らぐ場合の間には、統計的性質に差異が生じていると考えられる。

ここでは2.3節で得た2次モーメントの発散条件 (2.63) のグラフを描くことにより、どのような条件下でエネルギー的不安定性が生じるのか調べる。図. 2.8、図. 2.9には、それぞれ  $\alpha = 1, \omega_0 = 4$ 、 $\alpha = 1, \omega_0 = 2$  の場合について、振動数ゆらぎの強度  $\epsilon$  と変動の時間幅  $\Delta t_\omega$



に関する式 (2.63) のグラフが描かれている。図中、'infinite region' が 2 次モーメントの発散する領域で、'finite region' が 2 次モーメントが有限値になる領域である。

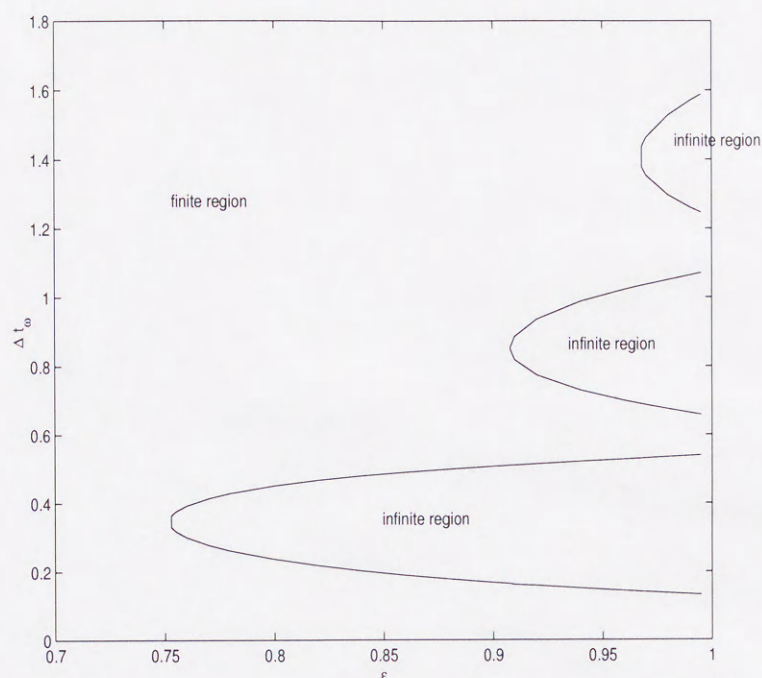


図. 2.8:  $|I - \mathcal{L}| = 0$  によって得られた、 $\alpha = 1, \omega_0 = 4$  の場合の 2 次モーメントの発散領域

図に示されているように、 $\epsilon$  がある臨界値を越えた場合、2 次モーメントの発散する領域が存在する。2 つの図の比較から、その発散は減衰係数  $\alpha$  に比較して  $\omega_0$  が大きい方が容易であることが読み取れる。さらに調べると、 $\omega_0$  がもう少し小さい場合には 2 次モーメントの発散は認められなくなり、特に決定論的な微分方程式での非振動的減衰の条件  $\alpha^2 > 4\omega_0^2$  では発散は起こらないことがわかる。つまり、発散が起こるための  $\alpha$  の上限が存在し、少なくともその上限は  $\alpha^2 < 4\omega_0^2$  を満たしているのである。また、 $\alpha = 1, \omega_0 = 4$  の場合では、 $\Delta t_\omega$  の増加に対してある程度周期的に発散の現象が起きていることもわかる。

次に、これらの結果を外力のない線形振動子でパラメタ  $\omega$  が決定論的に周期的に変動する、いわゆるパラメトリック振動 [68] と比較し考察することにする。パラメタ  $\omega$  をある周期で時間的に変動させると振幅が増大させることが可能となることは次のような直感的説明によりわかる [69]。減衰係数のない振動子の運動を位相空間で記述すると楕円軌道が描かれるが、変位がゼロとなる瞬間に  $\omega$  を変動させると、軌道の  $x$  軸との交点が変化することになるので、



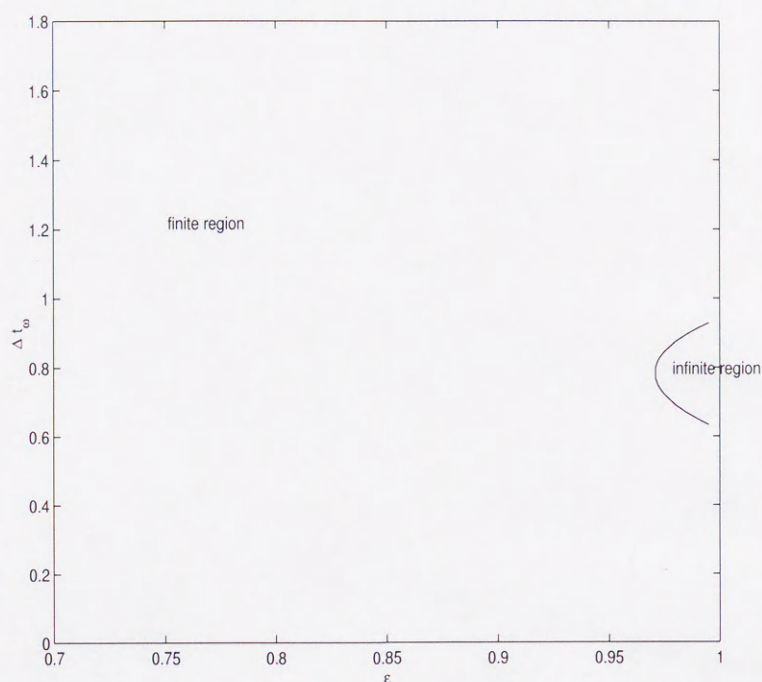


図. 2.9:  $|I - \mathcal{L}| = 0$  によって得られた、 $\alpha = 1, \omega_0 = 2$  の場合の 2 次モーメントの発散領域

軌道の楕円が引き伸ばされる。次に運動量がゼロになる瞬間に  $\omega$  を  $\Delta\omega$  変動させると、その瞬間にエネルギーが  $m(\omega - \Delta\omega)^2 X_{max}^2/2 - m\omega^2 X_{max}^2/2$  ( $m$  は振動子の質量、 $X_{max}$  はその時の変位) だけ変化し、今度は運動量軸に楕円軌道が引き伸ばされる。このようにタイミングよく周期的に  $\omega$  を変動させることで位相空間中の楕円軌道を大きくすることができる。

さらに減衰係数  $\alpha$  が存在しても、体系の遷移行列の固有値に関する議論から、次のような条件下では振動子の振幅が増大することがあることが知られている [70]。

$$\alpha < 2 \ln(R + \sqrt{R^2 - 1})/2\Delta t \quad (2.91)$$

ここで、 $R = \cos \omega_1 \Delta t \cos \omega_2 \Delta t - (\omega_1^2 \omega_2^2) \sin \omega_1 \Delta t \sin \omega_2 \Delta t / 2\omega_1 \omega_2$  と定義され、振動数は時間間隔  $\Delta t$  ごとに  $\omega_1$  と  $\omega_2$  の値を交互にとると仮定してある。

このような決定論的パラメトリック振動の描像は、本研究で得た振動数と外力の揺らぐ線形振動子のエネルギー的不安定性の生成と類似点があり、互いに深い関係にあることが想像できる。例えば、(2.91) 式のようにエネルギーが発散するための  $\alpha$  の値に上限が存在することである。 $\alpha$  がエネルギーの発散をおさえる働きを持つ点々が類似している。また、図. 2.8



に見られる  $\Delta t_\omega$  に関して2次モーメントが周期的に発散する様子は、上述のパラメトリック振動の直感的描像から理解することができる。というのは、 $\omega$  を変動させる瞬間が時間軸上のある周期上にありさえすれば、楕円軌道を単調に増大させることができるからである。

しかしながら、振動数と外力が揺らぐ線形振動子のエネルギー的不安定性は決して自明なことではない。なぜなら、パラメトリック振動における振動子の振幅の増大は、 $\omega$  の変動のうちの一つの標本関数に対して振動子の振幅が増大していくことを示しているに過ぎないからである。事実2次モーメントの表式(2.58)を見ると、分子に外力の分散値  $f^2$  が入っているので、外力がない場合2次モーメントはゼロになる。すなわち、外力なしで振動数だけが揺らぐ場合、上述の決定論的パラメトリック振動によって振動子の振幅が増大していく確率はゼロなのである。つまり  $\omega$  の変動の殆ど全ての標本関数に対して振動子の振幅が増大することがないといえる。一方、外力ゆらぎのみが存在する時の振動子の振る舞いは、決定論的な減衰の軌跡まわりにガウスのようなノイズが加わるだけである。ところが、2次モーメントの表式(2.58)は、外力ゆらぎと振動数ゆらぎが競合すると  $\omega$  の変動のうち振動子の振幅を増大させるような標本関数が強調されるような現象が起きることを示している。このように、2つのゆらぎ源の競合により1つのゆらぎ源にはない性質が誘起されるという点が決定論的なパラメトリック振動とは決定的に異なっている。

さらに、決定論的パラメトリック振動と振動数と外力の揺らぐ線形振動子の相違点として確率的な描像を挙げておく。パラメトリック振動では振動子の振幅は単純に増大するので、仮に単位時間あたりの存在確率で確率を考えるならば、存在確率の大きな位置は時間的に原点から遠ざかっていくことになる。一方振動数と外力の揺らぐ線形振動子では、2次モーメントが発散したとしても振動子の存在確率の最も大きい位置は原点にある。このことは次章でさらに検証するが、2次モーメントが発散は、その確率密度関数の逆二乗則に起因すると考えられるのである。



## 2.7 本章のまとめ

本章では複雑な挙動を示す時系列の典型的な例として振動数と外力の揺らぐ線形振動子を取り上げ、その振動子の変位に関する2次モーメントを求める方法と、それによる結果を示した。その方法の本質的な点は、振動数と外力のゆらぎそれぞれが離散時刻上でのみ起こるという仮定とその時間間隔の大きさの関係式(2.9)にあるが、これにより標本関数に対する振動子の変位と速度を正確に計算することができた。特に振動数ゆらぎの効果を、外力のみが揺らぐ場合の2つの減衰モードが行列(2.41)を介して互いに影響しあうこととして抽出できたことは興味深い。

このような方法を用いた計算結果から、以下のことがわかった。

1. (本文の意味での) 時間相関のない外力ゆらぎのみの存在下における2次モーメントの導出(2.3.1節)が行われ、Uhlenbeck-Ornsteinによる表式が再導出された。このとき、外力ゆらぎの短い時間相関は結果にあまり影響しないことがわかった。
2. (本文の意味での) 時間相関のない外力ゆらぎと振動数ゆらぎの両者の存在下における2次モーメントが厳密に導出され(式(2.58))、その2次モーメントの表式が発散する条件式が(2.63)式のような行列式の形式として得られた。この発散条件は2.6節で具体的に調べられ、決定論的なパラメトリック振動との類似が見られた。
3. (本文の意味での) 時間相関のある場合の2次モーメント計算法として、行列(2.41)の非対角項による展開による方法を提案した(2.4節)。2.5節による議論から、この近似は振動数ゆらぎの大きさ $\epsilon$ が小さい範囲のみで妥当であることがわかったが、逆に振動数ゆらぎの大きさ $\epsilon$ が大きい時、いかに行列(2.41)の非対角項が統計量の計算に重要かがわかった。例えば、2.6節で、外力のみが揺らぐ場合と振動数ゆらぎも存在する場合の確率密度関数に関する相違を指摘したが、その相違はこの行列(2.41)の非対角項が強く効いてくる時に明瞭になると推測できる。

本章で明らかになった2次モーメントの発散の可能性(エネルギー的不安定性)は、確率密度関数の形、すなわち、逆べき則から理解すべきものである。この考え方は、決定論的なパラメトリック振動における共鳴現象とは全く異なっている。しかしながら、2次モーメントの発散を示しただけでは、確率密度関数の逆べき則が完全に証明できたとはいえない。こ



のことは、次章で詳しく調べられるが、確率密度関数の逆べき則や、2.6節で議論したエネルギーの流れが平衡に達しない様は、このシステムの複雑な挙動の一端を示しているといえよう。この複雑な挙動は次章による解の動的側面の解析により、より明瞭になる。



## 第3章 2階線形確率微分方程式の解の動的性質

### 3.1 序論

この章では、(2.1) 式の解に関して、特にその時間変化に関する性質について調べる。

前章では2次モーメントの平衡値を計算した。しかし、実際の時系列においては、観測などによりある時刻における状態が確定された上で、その時刻に近い時刻での変数の分布が問題になることがある。例えば、時系列の推測や制御ではそのような問題の重要性は明らかであろう。一方、平衡分布を観測によって決めるには時間の十分な経過（理想的には無限の時間）が必要であるから、実際上はそのような分布が必ずしも観測されるとは限らない。さらに前章の結果のように平衡モーメントが発散するような状況では、無限時間後のモーメントが存在しないので、その時系列の性質を調べるには過渡的なモーメントの変化を調べる必要がある。そこで、まず本章の3.2節では2次モーメントの時間変化について調べる。

また時系列の時間変化に関する性質を表現するものとしてパワースペクトルがある。パワースペクトルについてはそのべき的性質（ $1/f$  ノイズ）が様々な自然現象、社会現象において観測されており、その理解が望まれている。本章では、パワースペクトルを計算する方法が提示され、 $1/f$  ノイズに関する一つの考察が与えられる。

確率微分方程式を議論する際、それを形式的に解いてから統計操作をとる方法とならんで、Fokker-Planck 方程式によって確率密度関数を求める方法は代表的である。また、確率微分方程式はその体系を微視的または素過程として捉えたものといえるのに対し、Fokker-Planck 方程式は体系の巨視的な捉え方といえ、その点でも、Fokker-Planck 方程式は興味深い。例えば、ランジュバン方程式はミクロな媒質分子の衝突を方程式に取りこんでいるのに対し、拡散方程式は多数のサンプルを同時に観測した時の粒子密度変化を表している。そこで3.4節ではFokker-Planck 方程式の導出により、時系列の確率密度関数の時間変化について考察



する。

Fokker-Planck 方程式は容易に解けるとは限らないので、それを補う意味でシミュレーションも示す。シミュレーションでは前章で示唆された確率密度関数の逆べき則の確認が行われる。また、確率密度関数の時間変化を実際に追うことにより、2次モーメント発散下での、確率密度関数の振る舞いについて調べることを試みる。

### 3.2 2次モーメントの平衡値への緩和過程

本節では、(2.1) 式で与えられるシステムにおいて、ある初期条件が与えられた場合に、その解の2次モーメントが前章で求めた2次モーメントの平衡値にどのように時間的に近づいていくかを調べる。やはり前章と同様で、振動数ゆらぎに時間相関が無い場合には議論がしやすい。というのは、この場合2次モーメントの時間発展に関する式 (2.55) 式が成り立つので、行列  $\mathcal{L}_n$  の固有値を調べることにより2次モーメントの時間発展の様子がわかるからである。

行列  $\mathcal{L}_n$  の固有値を  $\lambda$  とおくと、2次モーメントの時間変化に関する緩和時間を  $-\Delta t_\omega / \log(\lambda)$  と考えることができよう。図. 3.1 には行列  $\mathcal{L}_n$  の固有値から求められた2次モーメントの緩和時間  $\Delta t_\omega$  の  $\epsilon$  依存性が、パラメタ  $\alpha = 1.2$ 、 $\omega_0 = 4$  の場合に対してプロットしてある。このグラフから、 $\Delta t_\omega = 0.1$  の時は振動数ゆらぎの大きさ  $\epsilon$  が1に近づいても緩和時間は有限の値にとどまるが、 $\Delta t_\omega = 0.4$  の時には  $\epsilon = 0.8$  付近で緩和時間が急激に増大していることが読み取れる。

ところで、 $\alpha = 1.2$ 、 $\omega_0 = 4$  のパラメタは2章における図. 2.3 と同じパラメタである。図. 3.1 と図. 2.3 を比較してみると、緩和時間の増大は2次モーメントの平衡値の発散と対応していることがわかる。すなわち、2次モーメントの平衡値が発散する状況に近いと、2次モーメントは非常にゆっくりその平衡値に近づいていくこと、いわゆる臨界緩和 (critical slowing down) が起きていることが読み取れる。この相転移点と体系の動的性質の関係は物質の相転移と類似している。

このような特異な性質がパラメタによっては誘起されることは、外力のみが揺らぐ場合には決して起こらないことに注意したい。なぜなら、外力のみが揺らぐ場合の統計量の時間変



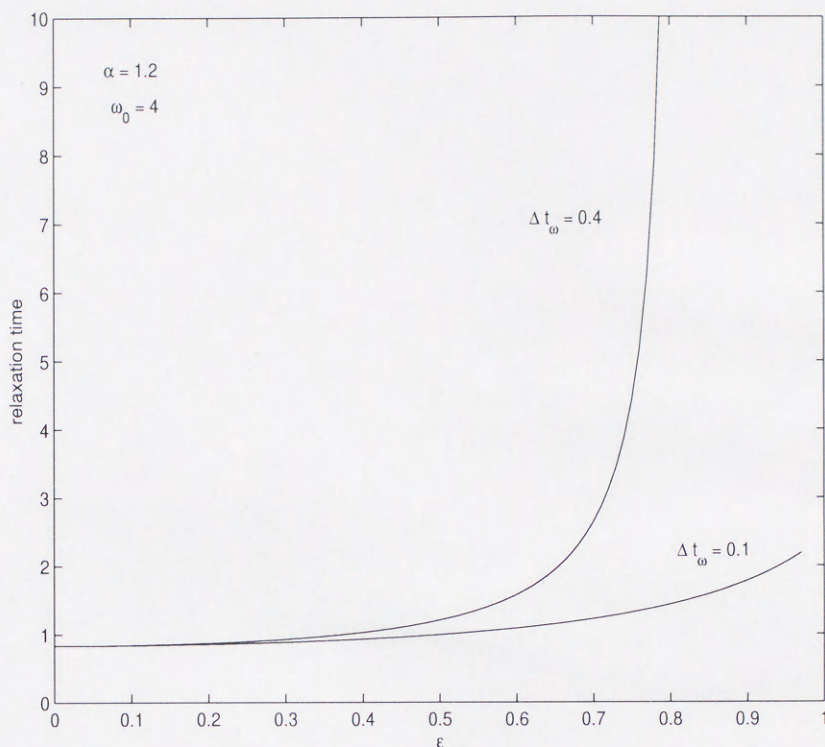


図. 3.1:  $\alpha = 1.2$ ,  $\omega_0 = 4$  における 2 次モーメントの緩和時間の  $\epsilon$  依存性

化のオーダーは、同じパラメタを持つ決定論的微分方程式の解の時間変化のオーダーと同じだからである。そのことは次のようにわかる。

振動子の分散値  $\langle (x_l - \langle x_l \rangle)^2 \rangle$  の時間変化を考える。まず、この値が初期条件  $\mathbf{x}_0$  に依存しないことが次のようにすぐわかる。式 (2.27), (2.31), (2.32) より、もし初期条件が分布を持たなければ、

$$\begin{aligned} x_l - \langle x_l \rangle &= y_l^{(1)} + y_l^{(2)} - \langle y_l^{(1)} + y_l^{(2)} \rangle \\ &= u^{(1)} \sum_{k=1}^l (\lambda^{(+)} )^{l-k} f_k + u^{(2)} \sum_{k=1}^l (\lambda^{(-)} )^{l-k} f_k. \end{aligned} \quad (3.1)$$

が成り立つ。この時間変化は初期条件に依存していない。(3.1) 式に平均操作をほどこすことにより、

$$\begin{aligned} \langle (x_l - \langle x_l \rangle)^2 \rangle &= \langle f_l^2 \rangle \{ (u^{(1)})^2 (1 - (\lambda^{(+)} )^{2l}) / (1 - (\lambda^{(+)} )^2) \\ &\quad + 2u^{(1)} u^{(2)} (1 - (\lambda^{(+)} )^l (\lambda^{(-)} )^l) / (1 - \lambda^{(+)} \lambda^{(-)}) \} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + (u^{(2)})^2 (1 - (\lambda^{(-)})^{2l}) / (1 - (\lambda^{(-)})^2) \} \\
& = \langle (y^{(1)})^2 \rangle_{eq} (1 - (\lambda^{(+)})^{2l}) + 2 \langle y^{(1)} y^{(2)} \rangle_{eq} (1 - (\lambda^{(+)})^l (\lambda^{(-)})^l) \\
& \quad + \langle y^{(2)} \rangle_{eq} (1 - (\lambda^{(-)})^{2l}) \quad (3.2)
\end{aligned}$$

が得られる。ただし、この計算の時、クロスタームは(2.6)より消えており、(2.42)、(2.43)、(2.44)が代入された。この結果に、(2.23)や(2.25)などを代入すると、 $\alpha^2 - 4\omega^2 > 0$ の場合には、 $\exp(-\alpha \pm k)\Delta t_f l$ 、 $\exp(-\alpha)\Delta t_f l$ 、の3つのモードで2次モーメントが平衡値  $\langle x^2 \rangle_{eq}$  に近づき、 $\alpha^2 - 4\omega^2 < 0$ の場合、

$$\begin{aligned}
\langle (x_i - \langle x_l \rangle)^2 \rangle &= 2 \{ \text{Im} \{ \langle (y^{(1)})^2 \rangle_{eq} \} \sin \tilde{k} \Delta t_f l - \text{Re} \{ \langle (y^{(1)})^2 \rangle_{eq} \} \cos \tilde{k} \Delta t_f l \} \exp(-\alpha \Delta t_f l) \\
&\quad - 2 \langle y^{(1)} y^{(2)} \rangle_{eq} \exp(-\alpha \Delta t_f l) + \langle x^2 \rangle_{eq} \quad (3.3)
\end{aligned}$$

が得られる。結局、これらの統計量の時間変化のオーダーは普通の微分方程式の時間変化と変わらない。

したがって、振動数ゆらぎの存在が外力ゆらぎの存在下では見られないような時間オーダーの急激な変動をもたらすといえる。ただし、上述の議論では、変位の観測時間が時間間隔  $\Delta t_f$  でのみ行われていることに注意しなければならない。連続的な変動をする外力ゆらぎで、その相関時間より短い時間内で観測した場合別の結果が得られると考えられる [8, 67]。

### 3.3 パワースペクトル

パワースペクトルは一般に自己相関関数のフーリエ変換により求めることができる。したがって本節では、時間相関のない外力ゆらぎと振動数ゆらぎの存在下での線形振動子の変位に関する自己相関関数  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle X_n X_{n+l} \rangle$  の導出から、パワースペクトルを考察する。一見この量は2次モーメントの平衡値  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle X_n X_n \rangle$  を求めた方法、すなわち2.3節の式(2.55)のような式の導出から求められそうに見える。しかし行列  $L_n$  やベクトル  $\tilde{\mathbf{F}}_n$  は過去の  $\mathbf{X}_n$  には影響しないが未来の  $\mathbf{X}_n$  には影響してしまうため、式(2.55)と同様な平均操作を行おうとした時、計算困難なクロスタームが多数残るので、式(2.55)のような方程式は単純には求まらない。



そこで自己相関関数を求める方法として、2.4節で導入した近似法を採用することにする。  
やはり行列  $M$  の非対角項の一次式で近似することにする。すると、定義 (2.75)、(2.76) より、  
いま計算すべき量は、

$$(f_n + g_n + o(M^{(12)} + M^{(21)}))(f_{n-l} + g_{n-l} + o(M^{(12)} + M^{(21)})) \simeq f_n f_{n-l} + f_n g_{n-l} + g_n f_{n-l} \quad (3.4)$$

の平均量となる。定義 (2.75)、(2.76) から、 $f_n$  は行列  $G$  の添え字に関して 2 種類の和、 $g_n$  は行列  $G$  の添え字に関して 4 種類の和からなっている。従って、時刻に関する添え字にも注意すると式 (3.4) の平均操作には、 $f_n f_{n-l}$  から 4 種類、 $f_n g_{n-l}$  から 8 種類、 $g_n f_{n-l}$  から 8 種類、計 20 種類の和の組み合わせの平均量を求めることが必要である。ここでは小節 2.4.2 で説明した方法でこの計算を行った。その結果を図. 3.2 に示す。

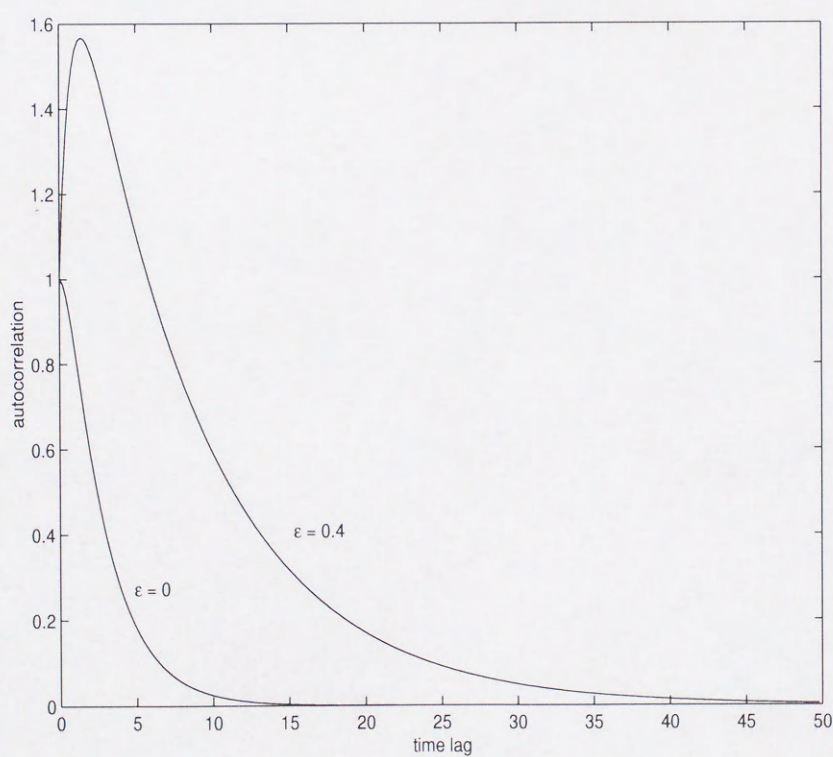


図. 3.2:  $\alpha = 2$ 、 $\omega_0 = 0.8$ 、 $\Delta t_\omega = 0.2$  の時の自己相関関数。振動数ゆらぎの強度  $\epsilon$  が 0 の時と 0.4 の時それぞれについて図示。

振動数ゆらぎの強度  $\epsilon$  が 0 の場合と 0.4 の場合を比べると、振動数ゆらぎが強い方が相関時間が長くなっている様子が読み取れる。ただし、 $\epsilon$  が大きすぎると近似計算の各項が発散し



てしまうのでプロットできなかった。さらに時間差の小さい領域での自己相関の値が増大しているという不合理な結果になっていることからみても、この近似計算は定量的な意味ではあまり信用できないと考えられる。しかしながら2次モーメントの計算のところでも指摘したように、近似計算でも現象の定性的面を捉えていると考えられ、 $\epsilon$ が大きくなると相関時間が長くなるという結論は正しいと予想できる。実際、近似計算が信用できるくらい $\epsilon$ が小さい範囲でも、わずかながら相関時間の増大は見ることができる。

図. 3.2 のデータからフーリエ余弦変換により、パワースペクトルを計算したものが、図. 3.3 に図示してある。実際には自己相関関数が  $\delta t_w$  の整数倍の時間上で計算されたので、次のような離散的な変換式を用いた。

$$S(2\pi\Delta t_w j/N) = \sqrt{2/N} \sum_i \frac{\langle X_0 X_i \rangle}{\langle X^2 \rangle} \cos(2\pi i j/N) \quad (3.5)$$

図. 3.3 からわかるように、振動数ゆらぎが小さい場合にはパワースペクトルが波数の増加に伴い緩やかに減少している。しかし、振動数ゆらぎが大きくなると、波数の大きな成分の強度は少なくなり波数の小さな成分にパワースペクトルが集中していることが読み取れる。この波数の小さな成分へのパワースペクトルの集中は、波長の長い振動成分の振幅が大きくなっていることを意味する。図示に用いたパラメタでは2次モーメントは発散しないので、 $\epsilon$ を増加させた時、波長の長いゆらぎの振幅が2次モーメントの発散する以前に増大し始めるということが結論できる。

相関時間の増大は近似式の導出における数式からある程度推論することもできる。本研究における近似法は、振動数ゆらぎが十分小さい時にはやはり小さいような行列  $M$  の非対角項で展開したことが本質である。この時、行列  $M$  の非対角項の0次の項の相関関数への寄与は、あたかも振動数ゆらぎが一定であるような指数関数的な減少を見せる関数である。この様子は、(3.2) 式のような振る舞いと類似している。次に行列  $M$  非対角項の1次の項は、振動数ゆらぎが一度だけ変化したことが考慮された指数関数の形をしており、係数には行列  $M$  非対角項の1次式がかかっている。さらに高次の項も同様な形をしているはずである。したがって全ての項を合わせると、様々な減衰の仕方をする指数関数を様々な重みで重ね合わせたような形になるはずである。このような関数はしばしば指数関数の持っている特長的な時間のオーダーを失い、べき関数的な振る舞いをすることが知られている [71, 72]。このような



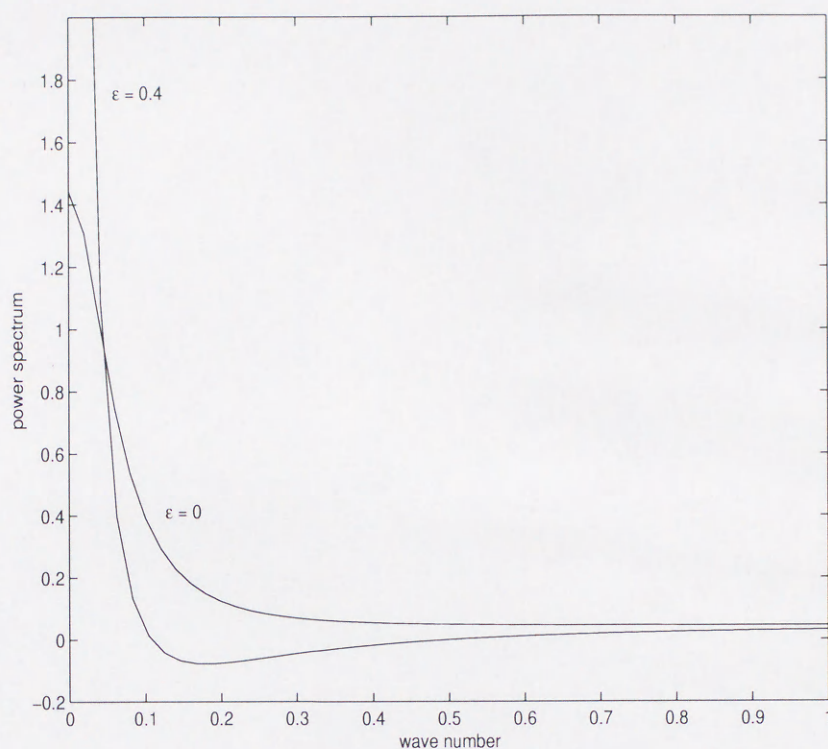


図. 3.3:  $\alpha = 2$ ,  $\omega_0 = 0.8$ ,  $\Delta t_\omega = 0.2$ . 自己相関関数のフーリエ余弦変換より求められたパワースペクトル。振動数ゆらぎの強度  $\epsilon$  が 0 の時と 0.4 の時それぞれについて図示。

考察から、振動数ゆらぎの強度  $\epsilon$  が大きくなると相関時間の長い自己相関関数が得られ、場合によってはべき関数的振る舞いをするであろうことが予想される。

もし自己相関関数がべき関数的振る舞いをするなら、パワースペクトルは次のように形式的に得られる [71]。

$$\begin{aligned} P(2\pi\nu) &\sim \int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{-(\xi-1)} \exp(i2\pi\nu\tau) d\tau \\ &\sim \Gamma(2-\xi) \cos(\pi(2-\xi)/2) |\nu|^{\xi-2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

つまり、このような場合にはパワースペクトルもべき的な関数で与えられる。このように、本研究で提案された近似法は数値的にはあまり良いとはいえないが、複雑な系で特徴的に現れるようないわゆる 'long time behavior' に対する考察を有効に行うことができる。



### 3.4 確率密度関数の時間的变化

前節までは一貫して、確率微分方程式の解を形式的に求めたあとに平均操作をほどこすという方法で、解の統計量を計算してきた。本節では、確率密度関数の時間的变化をその確率過程の性質から直接議論することを試みる。まず次の小節では  $\Delta t_f$  と  $\Delta t_w$  が微小の場合に関して Fokker-Planck 方程式を導出し、これまで得た結果と比較し考察する。ただし、一般の場合には Fokker-Planck 方程式導出そのものも困難で、さらに Fokker-Planck 方程式を完全に解くことは難しい。そこで小節 3.4.2 では、コンピュータにより実際の振動子の軌跡を調べることで確率密度関数の時間変化を直接的に調べる。

#### 3.4.1 フォッカー・プランク方程式による扱い

一般に連続時間上で定義された定常マルコフ過程  $x(t)$  があつた時、ある時刻に  $x$  にあつた状態が微小時間  $\Delta t$  後に  $r$  だけ移動している確率  $W(x, r)\Delta t dr$  が与えられると、Fokker-Planck 方程式は次のように形式的に導出される（付録 C 参照）。

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial y} \{a_1(y)P(x, t)\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \{a_2(y)P(x, t)\} \quad (3.7)$$

$$a_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} r W(x, r) dr \quad (3.8)$$

$$a_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} r^2 W(x, r) dr \quad (3.9)$$

ここで、 $P(x, t)$  は時刻  $t$  における  $x(t)$  の確率密度関数である。

本論文の形式化では時間間隔  $\Delta t_w$  ごとに確率微分方程式の解を追っているので、 $\Delta t_w$  が微小な場合には、上述の  $W(x, r)\Delta t$  もしくは  $a_1(y)$ 、 $a_2(y)$  が計算できると考えられる。この計算には式 (2.51) が使えそうだが、いまの Fokker-Planck 方程式の導出にはマルコフ性が必要となることに注意しなければならない。そのことは、ある時刻の状態  $x$  が与えられると、微小時間後の移動距離に対する確率分布が決めらねばならないことを意味する。(2.51) 式より、振動数ゆらぎに時間相関がない場合には、 $X_{n-1}, \dot{X}_{n-1}$  が定められた時、微小時間  $\Delta t_w$  後の  $X_n, \dot{X}_n$  の分布が区間  $n$  の振動数分布によって決められる。しかしながら振動数ゆらぎに時間相関がある場合には、区間  $n$  の振動数分布は、 $X_{n-1}, \dot{X}_{n-1}$  だけでなく過去の振動数ゆらぎの



経過にも依存するので事情は複雑である。そこで、とりあえず議論を振動数ゆらぎに時間相関がない場合について進めていく。

(2.51) 式より  $(X, \dot{X})$  は2変数のマルコフ過程と考えられる。そこで Fokker-Planck 方程式の導出のために必要となる5つの量が、(2.51) 式を用いて次のように計算される。

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \langle (X_n - X_{n-1}) \rangle_{(X_{n-1}, \dot{X}_{n-1})} \\
 &= (\langle L_n^{(11)} \rangle - 1) X_{n-1} + \langle L_n^{(12)} \rangle \dot{X}_{n-1} \\
 &\equiv A_{11} X_{n-1} + B_{11} \dot{X}_{n-1}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
 a_{22} &= \langle (\dot{X}_n - \dot{X}_{n-1}) \rangle_{(X_{n-1}, \dot{X}_{n-1})} \\
 &= (\langle L_n^{(21)} \rangle) + \langle L_n^{(22)} \rangle \\
 &\equiv A_{22} X_{n-1} + B_{22} \dot{X}_{n-1}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= \langle (X_n - X_{n-1})^2 \rangle_{(X_{n-1}, \dot{X}_{n-1})} \\
 &= \langle (L_n^{(11)} - 1)^2 \rangle (X_{n-1})^2 + (\langle (L_n^{(11)} - 1) L_n^{(12)} \rangle - 1) X_{n-1} \dot{X}_{n-1} \\
 &\quad + \langle (L_n^{(12)})^2 \rangle (\dot{X}_{n-1})^2 + \langle (\tilde{F}_n^{(1)})^2 \rangle \\
 &\equiv C_{11} X_{n-1}^2 + D_{11} X_{n-1} \dot{X}_{n-1} + E_{11} \dot{X}^2 + F_{11}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
 b_{12} &= \langle (X_n - X_{n-1})(\dot{X}_n - \dot{X}_{n-1}) \rangle_{(X_{n-1}, \dot{X}_{n-1})} \\
 &= \langle (L_n^{(11)} - 1) L_n^{(21)} \rangle (X_{n-1})^2 + (\langle (L_n^{(12)} L_n^{(21)} + (L_n^{(22)} - 1)(L_n^{(11)} - 1) \rangle - 1) X_{n-1} \dot{X}_{n-1} \\
 &\quad + \langle L_n^{(12)} (L_n^{(22)} - 1) \rangle (\dot{X}_{n-1})^2 + \langle \tilde{F}_n^{(1)} \tilde{F}_n^{(2)} \rangle (\dot{X}_{n-1})^2 \\
 &\equiv C_{12} X_{n-1}^2 + D_{12} X_{n-1} \dot{X}_{n-1} + E_{12} \dot{X}^2 + F_{12}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
 b_{22} &= \langle (\dot{X}_n - \dot{X}_{n-1})^2 \rangle_{(X_{n-1}, \dot{X}_{n-1})} \\
 &= \langle (L_n^{(21)})^2 \rangle (X_{n-1})^2 + (\langle (L_n^{(22)} - 1) L_n^{(21)} \rangle - 1) X_{n-1} \dot{X}_{n-1}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \langle (L_n^{(22)} - 1)^2 \rangle (\dot{X}_{n-1})^2 + \langle (\tilde{F}_n^{(2)})^2 \rangle \\
& \equiv C_{22} X_{n-1}^2 + D_{22} X_{n-1} \dot{X}_{n-1} + E_{22} \dot{X}^2 + F_{22}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

これらによって、次の Fokker-Planck 方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} P(x, \dot{x}, t) &= -\frac{\partial}{\partial x} \{a_{11}(x, \dot{x})P\} - \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \{a_{22}(x, \dot{x})P\} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{b_{11}(x, \dot{x})P\} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \{b_{12}(x, \dot{x})P\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^2} \{b_{22}(x, \dot{x})P\}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

いま位置に関する確率分布を議論したいので、両辺を  $\dot{x}$  で積分する。その結果多くの項が出てくるが次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) &= -A_{11} P(x, t) - A_{11} x P(x, t) + B_{11} \frac{\partial}{\partial x} \int d\dot{x} \dot{x} P(x, \dot{x}, t) - B_{22} P(x, t) \\
&- B_{22} \int d\dot{x} \dot{x} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} P(x, \dot{x}, t) + C_{11} P(x, t) + 2C_{11} \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) \\
&+ D_{11} \frac{\partial}{\partial x} \int d\dot{x} \dot{x} P(x, \dot{x}, t) + \int d\dot{x} b_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, \dot{x}, t)/2 + E_{22} P(x, t) \\
&+ 2E_{22} \int d\dot{x} \dot{x} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} P(x, \dot{x}, t) + \int d\dot{x} b_{22} \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^2} P(x, \dot{x}, t)/2 + D_{21} P(x, t) + F_{11} \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^2} P(x, t) \\
&+ 2E_{12} \frac{\partial}{\partial x} \int d\dot{x} \dot{x} P(x, \dot{x}, t) + D_{12} x \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) \\
&+ D_{12} \int d\dot{x} \dot{x} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} P(x, \dot{x}, t) + \int d\dot{x} b_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \dot{x}} P(x, \dot{x}, t)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

ただし、 $\int d\dot{x} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} P(x, \dot{x}, t) = 0$ 、等ですでに消えている項もある。

$\dot{x}$  を含む項の積分を部分積分で簡単化し、 $P(x, \dot{x}, t)$  が  $\dot{x}$  や  $x$  の増加に対し十分早く小さくなることなどを仮定して、さらに簡単化が進められる。例えば最後の項は、

$$\begin{aligned}
\int d\dot{x} b_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \dot{x}} P(x, \dot{x}, t) &= \int d\dot{x} (C_{12} + D_{12} x \dot{x} + E_{12} \dot{x}^2 + F_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \dot{x}} P(x, \dot{x}, t) \\
&= D_{12} x \int d\dot{x} \dot{x} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \dot{x}} P(x, \dot{x}, t) + E_{12} \int d\dot{x} \dot{x}^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \dot{x}} P(x, \dot{x}, t) \\
&= -D_{12} x \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) E_{12} + \frac{\partial}{\partial x} \int d\dot{x} \dot{x}^2 P(x, \dot{x}, t) \\
&= -D_{12} x \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) + E_{12} \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) \langle \dot{x}^2 \rangle_x
\end{aligned} \tag{3.17}$$



などとなる。ここで、 $\langle \dot{x}^2 \rangle_x$  は条件付確率で平均をとった  $\int d\dot{x} P(\dot{x}, t|x)$  である。このような積分を他の項にも実行した結果、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = & \{-A_{11} - B_{22} + C_{11} - E_{22}/2 + (-D_{22}/2 - A_{11})x\} P(x, t) \\ & + (2C_{11} + D_{12} - C_{12})x \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) + F_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) \\ & + (D_{11}x^2/2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E_{11}x \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2E_{12} \frac{\partial}{\partial x}) P(x, t) \langle \dot{x} \rangle_x \\ & + E_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) \langle \dot{x}^2 \rangle_x / 2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

が得られる。

しかしながら依然として  $\langle \dot{x} \rangle_x$  や  $\langle \dot{x}^2 \rangle_x$  などの不明な関数がある。これらを求めるのは難しいと考えられるが、(3.18) をもとにいくつかの考察をすることができる。 $\langle \dot{x} \rangle_x$  は位置  $x$  における流れの期待値とみることができ、十分時間が経ち定常状態になっていればゼロとなると考えられる。また  $\langle \dot{x}^2 \rangle_x$  は、位置  $x$  における運動エネルギーの期待値とみることができ、 $m \langle \dot{x}^2 \rangle_x / 2 + m\omega^2 x^2 / 2 = \text{constant}$  が成り立っていれば、Fokker-Planck 方程式は解きやすい形式になる。しかしエネルギー的不安定性が生じるとこのような単純な仮定が成り立つとは考えられず、 $\langle \dot{x}^2 \rangle_x$  はより込みいった表式になることが予想され、この点は振動数ゆらぎの効果と考えられる。

### 3.4.2 シミュレーションによる扱い

前小節では  $\Delta t_\omega$  が微小で振動数ゆらぎに時間相関のない場合について、Fokker-Planck 方程式を導出し考察した。しかし、その解について完全に理解することは難しく、また、 $\Delta t_\omega$  が微小でない場合や振動数ゆらぎに時間相関がある場合には、Fokker-Planck 方程式の導出そのものも難しい。ここでは、計算機によって、(2.10) 式、(2.11) 式を使ってランダムな  $f_n$ 、 $\omega_n$  の代入を繰り返した結果について述べる。計算機による計算は、解析的な表式が見つけない反面、外力や振動数のゆらぎ方をかなり自由に仮定することができる。

確率密度関数に関する結果を述べる前に、実際の振動子の振る舞いについて説明する。図. 3.4 はゆらぎのない場合、外力ゆらぎのみが存在する場合、大きな振動数ゆらぎも存在しエネルギー的不安定な状態にある場合、それぞれの場合の振動子の軌跡の典型例を示したもの



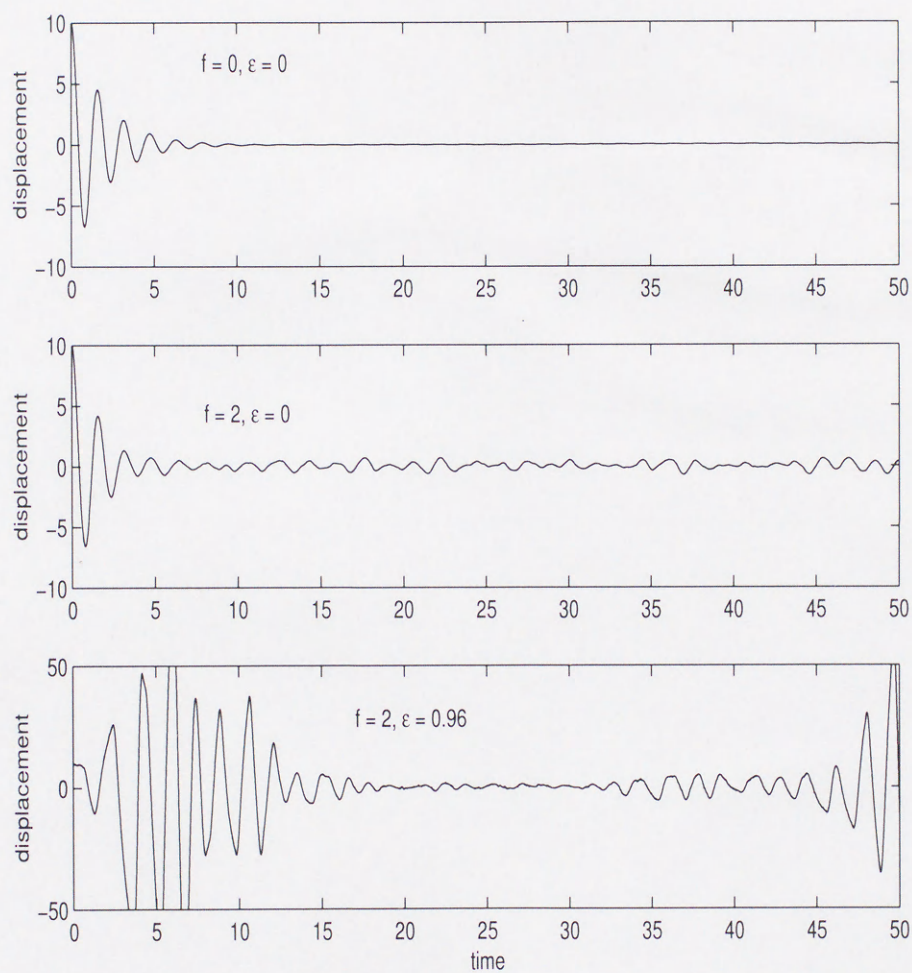


図. 3.4:  $\alpha = 1$ 、 $\omega_0 = 4$  の時の振動子の変位の軌跡。一番上がゆらぎのない場合、真中が外力ゆらぎのみが存在する場合、一番下が大きな振動数ゆらぎも存在しエネルギー的不安定な状態にある場合。



である。よく知られているように、ゆらぎのない場合には $\alpha$ と $\omega$ の大小関係により、減衰振動、または、単調な減衰が見られるが、図. 3.4には減衰振動の例を示してある。ゆらぎのない微分方程式の解は初期条件が決まれば一意に決まるので、決定論的な解と呼ばれる。これに外力ゆらぎが加わると、その決定論的な解の周りにガウスのなゆらぎが生じたような軌跡が描かれる。このことの解析的な説明は3.2節で行った。さらに2章で証明したように、振動数ゆらぎも加わりその強度が十分に大きいとしばしば2次モーメントが発散する。この時の軌跡が図. 3.4の一番下に描かれている。2次モーメントが発散するとはいえ、前述のパラメトリック振動の時のように振動子の位置は原点から離れ去るわけではない。この図に見られるようにある時刻には原点付近にいたかと思うと突如として振幅が増し始めるなど、直感的な意味でも非常に複雑な動きをしていることが見て取れる。2次モーメントの発散はこのような複雑な動きに関連しており、直接的には確率密度関数の形で説明される。

では次に、このような軌跡を多数描かせることによりある到達地点に存在する頻度数を測定した結果について述べる。以下で得られたデータは全て試行回数は1万回によるものである。

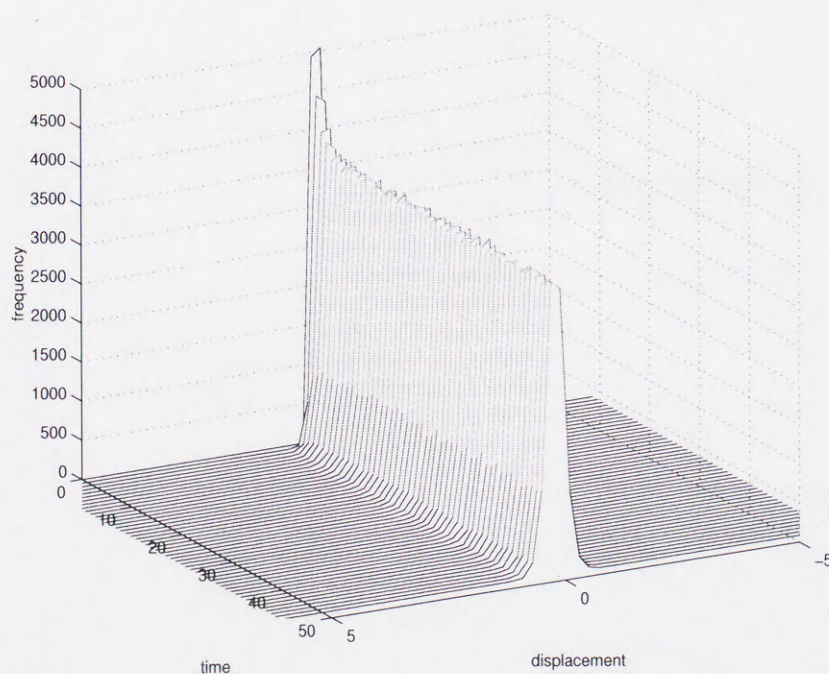


図. 3.5: パラメタは $\alpha = 1$ 、 $\omega_0 = 5$ 、 $\epsilon = 0.5$ 、 $f = 1$ 、 $\Delta t_\omega = 0.2$ 、 $\Delta t_f = 0.005$ 。初期条件が $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ の場合の確率密度関数の時間変化。



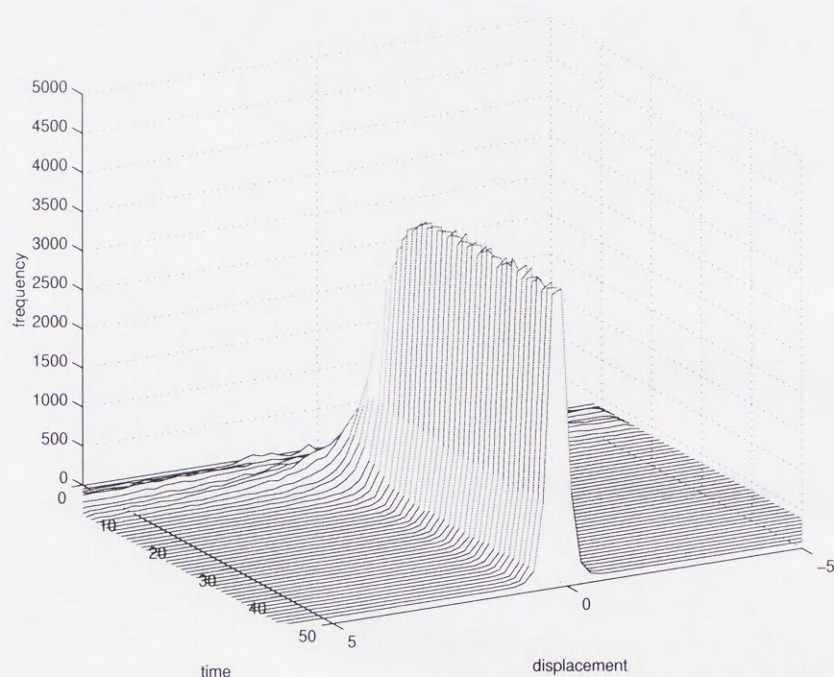


図. 3.6: パラメタは  $\alpha = 1$ ,  $\omega_0 = 5$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $f = 1$ ,  $\Delta t_\omega = 0.2$ ,  $\Delta t_f = 0.005$ . 初期条件が  $(x, \dot{x}) = (50, 0)$  の場合の確率密度関数の時間変化

図. 3.5 と図. 3.6 は外力ゆらぎも振動数ゆらぎも存在するが 2 次モーメントの発散する状況にはない状況下で、確率密度関数の時間変化を追ったものである。ただし、それぞれ初期条件が  $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ ,  $(x, \dot{x}) = (50, 0)$  と異なっている。この初期条件の違いを反映し、初期時刻付近では両者は全く異なる関数形をしている。しかし十分時間が経つと、振動数ゆらぎの大きさが  $\epsilon = 0.5$  程度と小さく 2 次モーメントが収束する状況を反映し、両者とも確率密度は原点付近に集中している。注目したいのは、早い時刻 ( $time \simeq 10$  程度) で両者の確率密度関数は一致していることが読み取れ、その時刻程度で十分に平衡分布に達していると考えられることである。この  $time \simeq 10$  程度は、決定論的な場合 (例えば少しパラメタが違うが図. 3.4 で一番上の決定論的な場合のグラフは  $time \simeq 10$  程度で減衰しきっている。) の減衰の時間のオーダーと変わりないと言ってよい。

しかし、この時間のオーダーは振動数ゆらぎの強度  $\epsilon$  が大きくなり 2 次モーメントの発散する状況になると急激に変わってくる。図. 3.7 と図. 3.8 は上述の図と同様なパラメタで振動数ゆらぎの大きさが  $\epsilon = 0.995$  となっているものであり、やはり初期条件がそれぞれ



$(x, \dot{x}) = (0, 0)$ 、 $(x, \dot{x}) = (50, 0)$  に選ばれている。

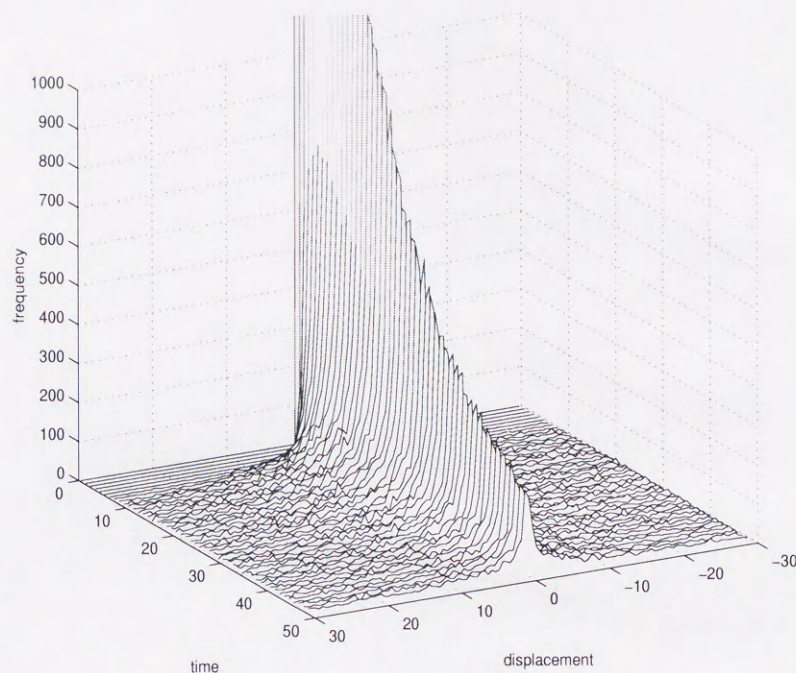


図. 3.7: パラメタは  $\alpha = 1$ 、 $\omega_0 = 5$ 、 $\epsilon = 0.995$ 、 $f = 1$ 、 $\Delta t_{\omega=0.2}$ 、 $\Delta t_f = 0.005$ 。初期条件が  $(x, \dot{x}) = (0, 0)$  の場合の確率密度関数の時間変化

図. 3.7 からは、 $(x, \dot{x}) = (0, 0)$  の場合には初期時刻付近では確率密度が原点付近に集中しており、時間が経つにつれて、それがゆっくりと崩壊していく様子がうかがえる。一方、図. 3.8 では、初期条件が  $(x, \dot{x}) = (50, 0)$  となっていることを反映し初期時刻付近ではかなりでたらめな関数形をしているのが、時間が経つにつれて、それがゆっくりと原点付近に集中していく様子がうかがえる。前述の 2 次モーメントが収束する場合との顕著な違いは、平衡分布へ近づく時間のオーダーが非常に遅いことである。

このことをはっきりとみるために図. 3.9 では  $\text{time} \simeq 50$  での確率密度関数を比較してある。初期条件  $(x, \dot{x}) = (0, 0)$  の確率密度関数で、時間に対してピークの高さが減少していつているのに対し、図中下側の線が初期条件が  $(x, \dot{x}) = (50, 0)$  のもので、時間に対してピークの高さが増大していつていることを考慮すると、確かにこの 2 つの線の間平衡分布が存在することが予測できる。しかし、その平衡分布に至るまでの時間は、50 単位時間経過しても確率密度関数が殆ど一致していないという結果からみても、非常に長いと結論できる。



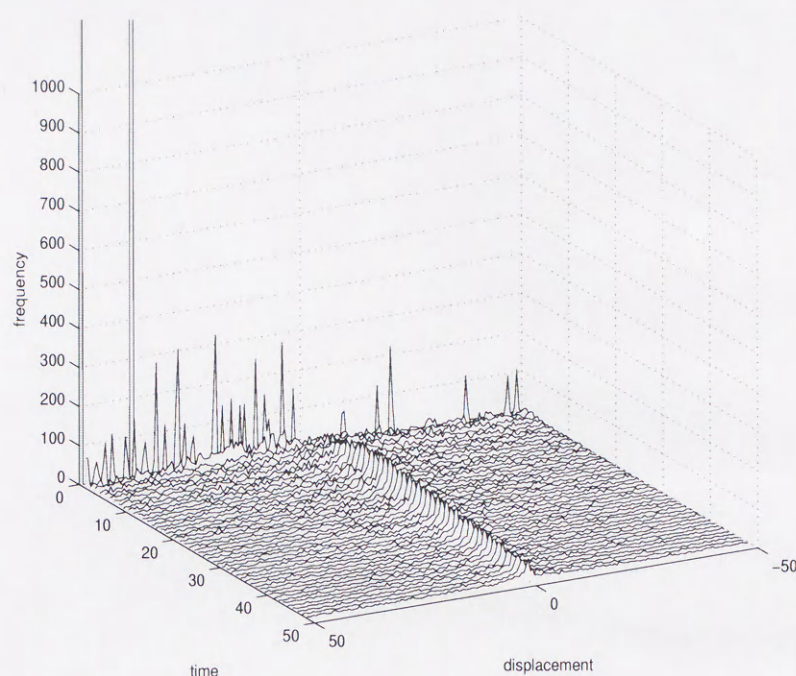


図. 3.8: パラメタは  $\alpha = 1$ ,  $\omega_0 = 5$ ,  $\epsilon = 0.995$ ,  $f = 1$ ,  $\Delta t_\omega = 0.2$ ,  $\Delta t_f = 0.005$ . 初期条件が  $(x, \dot{x}) = (50, 0)$  の場合の確率密度関数の時間変化

このように、確率密度関数が平衡にいたるまでの時間のオーダーは2次モーメントの発散の有無に応じて劇的に変化することがわかった。3.2節では、2次モーメントの平衡値への緩和時間が2次モーメント発散条件下に近づくと発散してしまうことを示したが、本節では確率密度関数の時間変化によってそのことを実証したともいえる。

2次モーメント発散下では、初期条件に未来の確率密度関数が長時間影響を受けつづけることにも注意したい。このことは複雑な状態といわれる物質の相転移と似た点がある。例えば、イジングスピン系の相転移点では、秩序パラメタはゼロであるから、各点のスピンの向きは1/2の確率でどちらの向きも向きうる。しかしある点でのスピンの向きが限定されると、相関が非常に遠くまで及んでいるために、周辺のスピンの向きもかなり限定されてくる。その結果相転移点でのスピンの向きの配置はランダムを伴う複雑なパターンを形成する。本研究の場合、2次モーメント発散下の状況では平衡の確率密度関数は原点から遠くまで広がるためランダムさを増している。しかし、ある時刻の位置が限定されると、その時刻から遠い時間における振動子の位置にまで相関が及んでしまう。この性質な複雑なパターンと呼ばれ



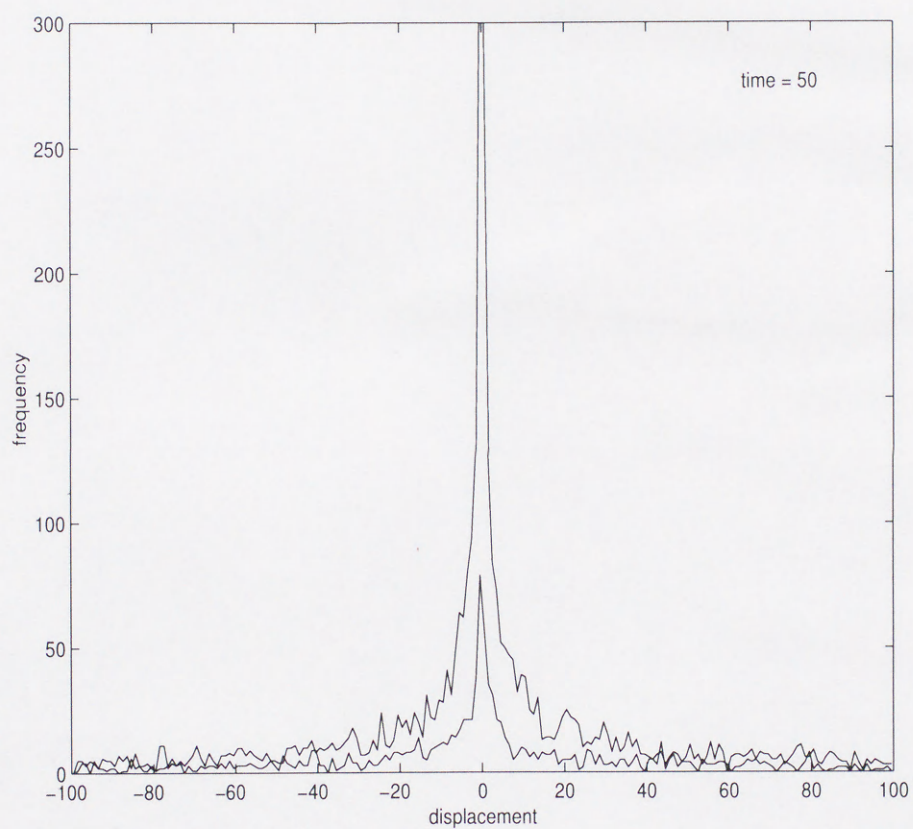


図. 3.9: time  $\simeq 50$  において初期条件が  $(x, \dot{x}) = (0, 0)$  の場合と初期条件が  $(x, \dot{x}) = (50, 0)$  の場合を比較したもの。上側の線が初期条件が  $(x, \dot{x}) = (0, 0)$  のもの。下側の線が初期条件が  $(x, \dot{x}) = (50, 0)$  のもの



る一般的性質の1つである [73]。こういった描像からも、本研究で扱う系が複雑な挙動を示すということがいえよう。

さらに複雑な挙動に関して、確率密度関数のべき則が挙げられる。図. 3.10 は図. 3.7 の  $\text{time} \simeq 50$  の断面の一部を両対数プロットしたものである。原点から離れるとデータのばらつきが大きくなっているが、これはサンプル数が少なすぎるのと、 $\text{time} \simeq 50$  では十分に時間が経っていないせいと考えられる。これらの不都合な条件にあるのにも関わらず、明らかに直線的な結果が得られており、確率密度関数のべき則が実証されたといえよう。2次モーメントの発散の直接的な原因は、この確率密度関数のべき則にある。

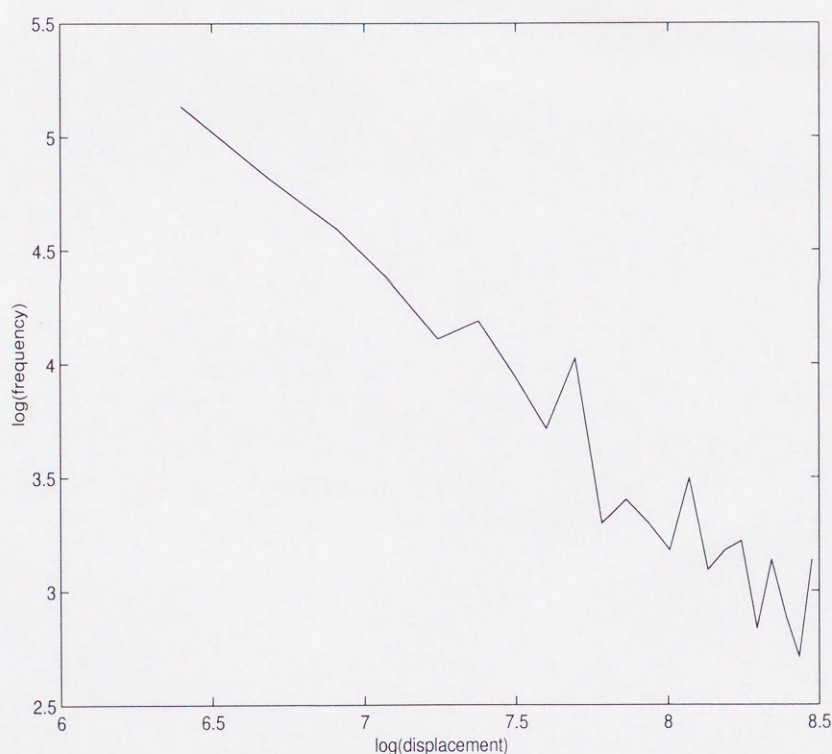


図. 3.10: 図. 3.6 において  $\text{time} \simeq 50$  のデータの一部を両対数プロットしたもの



シミュレーションの最後に、実際の時系列から、時間平均操作によって自己相関関数を作成したものを図. 3.11 に示す。図. 3.11 は2次モーメント発散下での様子であるが、自己相関関数が振動しながら減衰している様子が読み取れる。2次モーメント発散の状況では、このような自己相関関数の振動は常に予想される。なぜなら、2次モーメント発散にはパラメトリック振動が深く関わっているからである。ただし、2つのゆらぎ源によるシステムでは、決定論的パラメトリック振動のように完全に周期的に振動せず、時間が経つにつれ周期がずれて行くことがわかる。

しかしながら、確率密度関数の時間変化に見られるような極端な時間相関長の伸びははっきりとは読み取れない。この原因が何なのか、はっきりと示すことはできなかった。時間平均を取る際の時間を無限時間にはとれないためにかなり誤差のある結果であることは否めない。

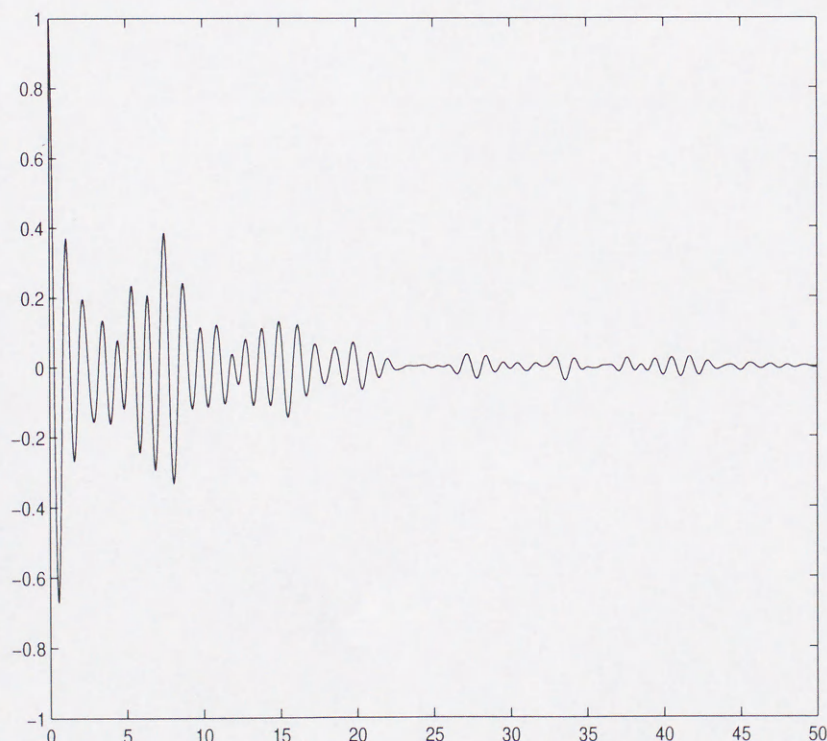


図. 3.11: 時間平均操作によって得られた自己相関関数。パラメタは  $\alpha = 1$ ,  $\omega_0 = 5$ ,  $\epsilon = 0.995$ ,  $\Delta t_\omega = 0.2$



### 3.5 本章のまとめ

本章では、振動数ゆらぎによって誘起される線形振動子の複雑な挙動を、2次モーメントの緩和過程、パワースペクトル（自己相関関数）の理論的考察と、シミュレーションにより調べた。2次モーメントの緩和過程を調べるには2章で導出された(2.55)式が用いられた。2次モーメントの平衡値だけでなく、過渡的な様子も本研究で導入された行列 $\mathcal{L}_n$ に基づいて議論されたことになる。自己相関関数については、2.4節で提案された近似法に基づき、その厳密な表式は得ることができなかったものの定性的な議論を行うことができた。

本章の主な結果は以下のようにまとめられる。

1. 2次モーメントの緩和時間は、2次モーメントの発散条件付近で急激に増大し発散する。すなわち臨界緩和が起きる。このような時間のオーダーの変化は外力のみが揺らぐ場合には決して起きない。
2. 自己相関関数の近似計算から、2次モーメントの発散条件付近では相関時間が増大することが示せた。このことは理論的にも、異なる時間で減衰する指数関数の重ね合わせという観点から理解可能である。この考え方は、相関関数やパワースペクトルのいわゆる 'long time tail' に対する洞察を与える。
3. Fokker-Planck 方程式では、運動エネルギーの条件付期待値  $\langle \dot{x}^2 \rangle_x$  の振る舞いが重要である。この振る舞いが、外力ゆらぎのみが存在する場合と、外力ゆらぎと振動数ゆらぎの両者が存在する場合の違いを顕著にすると予想できる。
4. シミュレーションにより確率密度関数の時間変化を調べると、2次モーメントの発散条件下でも確率密度関数の平衡分布が存在するが、平衡分布への緩和時間は非常に長くなる。
5. 2次モーメントの発散条件下での確率密度関数の平衡分布は逆べき則を満たす。このことが、2次モーメントの発散の直接的原因である。

本章の結果は、殆どが（本論文の意味で）時間相関のない振動数ゆらぎの仮定に基づいている。しかし、この仮定は正確には  $\Delta t_w$  の時間間隔では非常に強い相関を持つ振動数ゆらぎを意味しており、一般に適当な長さの時間相関を持つゆらぎの粗い近似であるとも解釈できる。したがって、結果の定性的面は、特別な場合に限らず成り立つと考えられる。本論文の



シミュレーションも（本論文の意味で）時間相関のない振動数ゆらぎの場合について行った。しかし、ゆらぎ源に時間相関を取り入れることは容易であり、今後そのようなシミュレーションが行われれば、ゆらぎ源の統計的性質と体系の状態変数の関係がより詳細に理解できるであろう。



## 第4章 複雑系としての粘性流体中の振動問題

### 4.1 序論

本章では、これまで述べてきた方法論や、確率微分方程式の解の統計的性質に関する結果を、弾性体からなるある特別な力学系に適用する。特にこれまで述べてきた2次モーメントの発散は、力学系の不安定さに関連しており、その点に注目して議論する。

構造物の不安定性は、本論文で扱うようなランダム力でなく、決定論的な外力によって生じるものが数多い。例えば、ある周波数の周期的な外力によって共鳴をおこすような振り子などは最も簡単な例であろう。しかしながら、一般に社会に存在する構造物は、その大きさを問わず、常に空間的、時間的にランダムに変動する外力（風、圧力変動）にさらされている。また、プラスチック、木、コンクリートといった材料では、化学反応、非常にゆっくりとした緩和現象などで、内的な物性が時間的に変化する。この内的性質に影響を与える因子（温度など）もランダムに変動する。これら物理的力や化学的性質のランダムな変動は、目的や場合によって無視してもよいが、重要な意味を持つケースもある。例えば、構造物の長い時間での使用や放置によるその機能、性質の変化、いわゆる aging の問題などである [74, 75]。

本章ではこのような観点から、粘性流体中に、横方向と縦方向の力によって固定された円柱弾性体の振動問題を議論する。ここで、それぞれの力はランダムな成分を含んでいると考える。このモデルは、Potapov[59]によって議論されている。しかしながら、この文献では計算の簡単のために状態を記述する変数の2階以上微係数は無視されている。そこで、まず本論文の方法論を1階の微分方程式に適用することを試み、1階微分方程式で近似的に系を記述した場合に対する考察を可能にしておく。

さらに、前章まで2階の微分方程式を扱ってきたので、これによって新しい知見を得ることも本章の目的である。その後、1階微分方程式で系を記述した場合の結果と、2階微係数を



無視しないの結果を比べることにより、2階微係数を見無視する扱ひの正当性について論じることにする。

本章の構成を説明する。次の節では円柱弾性体モデルについて説明し、それを記述する運動方程式を導出する。次の4.3節で、1階の微分方程式に本論文の方法を適用した場合の計算について詳述したあと、3章までの結果を直接、円柱弾性体モデルの運動方程式の統計的解析に適用する。最後に4.4節で、この弾性円柱の不安定性についてわかることを簡単にまとめる。

## 4.2 力学モデル

この節では本章で解析する力学モデルについて説明し、それを記述する運動方程式を導出する。

いま、長さ  $L$  の細い円柱形の等質な弾性体が粘性流体中に置かれていることを想定する(図. 4.1)。この円柱はその両端において、縦方向(円柱の軸に平行な方向)に、上下から力がかかっている、なおかつ横方向には壁面で固定されているとする。また粘性流体中なので、横方向(円柱の軸に平行な方向)への変形時に、変形の数に比例した抵抗力を受けるとする。また、横方向、縦方向それぞれの力の成分にランダム力が存在すると仮定する。

この弾性体の形状に関する運動方程式を考える。いま上下からかかっている力を  $P(t)$  として、これを

$$P(t) = P_0 + p(t) \quad (\langle p(t) \rangle = 0) \quad (4.1)$$

のように、平均値  $P_0$  とランダム成分  $p(t)$  に別ける。また、時刻  $t$ 、縦軸座標  $x$  における弾性体軸上の点の平衡の位置からの横方向へのずれを  $w(x, t)$  とおく。この弾性体のヤング率を  $E$ 、断面の慣性モーメントを  $I$  とおく。この弾性体の縦軸座標  $x$  の位置において、横方向へかかる単位長さあたりの力は、上下から押さえられている力から生じる曲率に比例した力  $(P_0 + p(t)) \frac{\partial^2}{\partial x^2} w$ 、平衡の位置に戻ろうとする力  $EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} w$  [76]、粘性流体の抵抗力  $\eta \frac{\partial}{\partial t} w$  ( $\eta$  は粘性率) [77]、流体分子等の衝突によるランダム力  $q(x, t)$  である。従って運動方程式は、円柱の単位長さあたりの質量を  $m$  として、

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, t) = (P_0 + p(t)) \frac{\partial^2}{\partial x^2} w + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} w - \eta \frac{\partial}{\partial t} w - q(x, t) \quad (4.2)$$



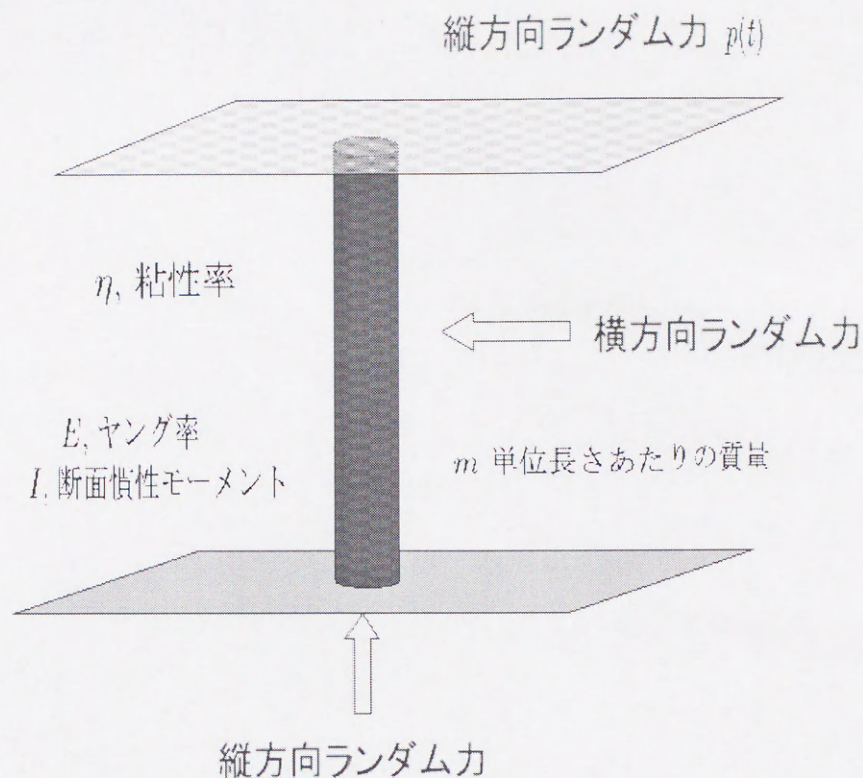


図. 4.1: 二つの平行な壁に固定された粘性流体中の細い弾性円柱。両端は壁に固定されているが、壁から垂直方向にランダムな力を受ける。横方向（壁に平行方向）にも、流体由来のランダム力が加わっている。

となる。

次に時間の変数だけを残すために、空間に関してフーリエ級数展開する。弾性体の端は固定されているので、余弦成分はなく、

$$w(x, t) = \sum_j w_j(t) \sin(j\pi x/L) \quad (4.3)$$

$$q(x, t) = \sum_j q_j(t) \sin(j\pi x/L) \quad (4.4)$$

$$(4.5)$$

とおける。これらを代入することにより、次のようにフーリエ係数に関する方程式が得られる。

$$\begin{aligned} m\ddot{w}_j &= -(j\pi/l)^2 (P_0 + p(t)) w + (j\pi/l)^4 EI w - \eta\dot{w}_j - q_j(t) \\ &= -(a_j + \xi_j(t)) w - \eta\dot{w}_j - q_j(t) \end{aligned} \quad (4.6)$$



ここで簡単のため、 $a_j = -(j\pi/L)^2 P_0 + (j\pi/L)^4 EI$ 、 $\xi_j(t) = -(j\pi/L)^2 p(t)$  とおき、時間微分を変数の上の点で表した。この微分方程式は前章まで扱ったものと同じ形をしており、これまでの結果が適用可能である。しかし、この方程式をさらに簡単化した場合の考察がいくつかあるので紹介する。

まずもっとも簡単な扱いは、加速度の項を無視し、なおかつ横方向のランダム力がなく、縦方向のランダム力はホワイトノイズであるという仮定を持ちこむことである。すると (4.6) 式は、

$$\eta \dot{w}_j = -(a_j + \xi_j(t)) w \quad (4.7)$$

のような1階線形確率微分方程式になる。この場合について Fokker-Planck 方程式が導かれており [59]、その議論によると、 $\xi$  のゆらぎの大きさが  $a_j$  に比して大きくなるとモーメントが発散する。また、この簡単化された場合を扱う代わりに、円柱を弾性体でなく粘弾性体と仮定したり、ホワイトノイズでなく有色ノイズを仮定する試みもある。

次に、やはり2階時間微分を無視し、ただし横方向のゆらぎも考慮した場合 (4.6) 式は、

$$\eta \dot{w}_j = -(a_j + \xi_j(t)) w - q_j(t) \quad (4.8)$$

のようになる。この確率微分方程式は1.2節で紹介したような別のシステムの解析法として提案され、いくつかの研究例がある。

以下の節ではこのような運動方程式の取り扱い方にならい、まず (4.8) 式に第2章で導入した方法論をそのまま適用することを試みる。ただし第2章以下と同様に、2つのノイズ  $q_j(t)$  と  $\xi_j(t)$  は独立であり、 $q_j(t)$  については時間相関がないと仮定する。(4.8) 式のような1階微分方程式の取り扱いの方が2階微分方程式の扱い方より、はるかに計算が簡単で、なおかつ、節2.2で述べたような困難点のかなりの部分を回避できるのでかなり詳しい計算が可能となる。しかしながら、加速度を無視するというのは大胆な簡単化であり、(4.8) 式の考察を行うだけではこの体系のかなり特殊な局面しか調べられないと考えられる。そこで次節後半では、第2章、第3章の結果から直接 (4.6) 式を考察し、1階微分方程式による結果と簡単に比較する。



## 4.3 本論文の方法論による解析

### 4.3.1 1階線形確率微分方程式による扱い

(4.8) 式に、本論文の方法を適用することを考える。2章の記述と記号が合うように  $\omega(t) = (a_j + \xi_j(t))/\eta$ 、 $f(t) = -q_j(t)/\eta$  とおいて、(4.8) 式を書きなおしておく。

$$\dot{w} + \omega(t)w = f(t) \quad (4.9)$$

ただし、以下で記号が煩雑にならないように添え字  $j$  を省略した（以下の議論での時間を表す添え字と混同しないように注意）。また、2つの確率変数  $\omega(t)$ 、 $f(t)$  とも、2.2節で導入したような階段関数的振る舞いをするものと仮定する（時間間隔  $\Delta t_f$ 、 $\Delta t_\omega$ 、定整数  $m$ 、外力ゆらぎ強度  $f$ 、等の記号も以前と同じ意味で使う）。

すると、初期時刻から  $\Delta t_f$  まで時間が経過するまで、式 (4.9) は定数係数の微分方程式だから、簡単に解が求まり、

$$w(\Delta t_f) = f_1/\omega_1 + (w(0) - f_1/\omega_1)e^{-\omega_1\Delta t_f} \quad (4.10)$$

となる。この  $w(\Delta t_f)$  と  $w(0)$  の関係は、 $w(l\Delta t_f)$  と  $w((l-1)\Delta t_f)$ （ここで  $l$  は  $m$  より小さい整数）に対しても同様に成り立つので、(4.10) 式は  $w(l\Delta t_f) \equiv w_l$  に対する漸化式ともいえる。これから時刻  $m\Delta t_f$  における変位  $w(m\Delta t_f) = w_m$  が、

$$\begin{aligned} w_m &= \frac{f_m}{\omega_1} (1 - e^{-\omega_1\Delta t_f}) + w_{m-1}e^{-\omega_1\Delta t_f} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} e^{-k\omega_1\Delta t_f} \frac{f_{m-k}}{\omega_1} (1 - e^{-\omega_1\Delta t_f}) + e^{-m\omega_1\Delta t_f} w(0) \\ &= A_1 + B_1 w(0) \end{aligned} \quad (4.11)$$

と得られる。ただし、

$$A_n = \sum_{k=0}^{m-1} e^{-k\omega_n\Delta t_f} \frac{f_{m-k}}{\omega_n} (1 - e^{-\omega_n\Delta t_f}) \quad (4.12)$$

$$B_n = e^{-m\omega_n\Delta t_f} \quad (4.13)$$

とおいた。



(4.11) 式の関係は、 $A_1$  を  $A_n$  に、 $B_1$  を  $B_n$  に置きかえることで、 $w_{m \times n}$   $w_{m \times (n-1)}$  の関係式ともみなせる。そこで、

$$w_{m \times n} \equiv W_n \quad (4.14)$$

とにおいて、 $W_n$  に対する漸化式が得られる。

$$W_n = A_n + B_n W_{n-1} \quad (4.15)$$

このように 2.2 節で行った方法と同じ要領で、時刻  $\Delta t_\omega$  おきの  $w(t)$  の値の列  $W_n$  に関する漸化式を導いた。これは第 2 章の結果である (2.33) 式や (2.34) 式に比べ、扱いがずっと容易になっていることに注意したい。というのも、2.2 節では ((2.37) 式のすぐ下で注意したように) 区間ごとに対角化を行っているため、対角化に伴う  $\mathbf{Y}_n$  への変数変換がどの時間区間で行われたのかに注意せねばならなかったからである。一方式 (4.15) の扱いには最初から対角化の必要がない。

漸化式 (4.15) を解くことにより、

$$\begin{aligned} W_n &= A_n + \sum_{k=0}^{n-2} \left( \prod_{i=n-k}^n B_i \right) A_{n-k-1} + \prod_{i=1}^n B_i W_0 \\ &= \sum_{k=-1}^{n-2} G(n, n-k-1) A_{n-k-1} + G(n, 0) W_0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

が得られる。ただし、Green 関数  $G(n, n-k-1)$  を、

$$G(n, n-k-1) = \begin{cases} \left( \prod_{i=n-k}^n B_i \right) & (k \neq -1) \\ 1 & (k = -1) \end{cases} \quad (4.17)$$

と定義した。この Green 関数は、2.4 節の (2.68) 式で導入した Green 関数と同様な意味を持つが、その具体形はそれより簡単な表式なので (2.72) のような近似を持ちこむ必要もない。

次に統計量の計算に移る。一般性を持たせるために  $p$  次のモーメントについて考え、さしあたって平衡状態に至った統計量を計算することにする。初期条件を無視すると、式 (4.16) より、

$$\langle (W_n)^p \rangle = \sum_{k_1=-1}^{n-2} \cdots \sum_{k_p=-1}^{n-2} \left\langle \prod_{i=1}^p G(n, n-k_i-1) \prod_{i=1}^p A_{n-k_i-1} \right\rangle \quad (4.18)$$

が得られる。この平均操作において、確率変数  $f_j$  と  $\omega(t)$  は独立と仮定されているので、 $f_j$  に関する平均操作を  $\omega(t)$  とは独立に先に行うことができる。この時、(4.18) 中の  $\{k_1, k_2, \dots, k_p\}$



に関する和のうち、例えば、 $k_1 \neq k_i$  (for all  $i$ ) で指定されるような項は、ゼロになる。なぜなら、定義式 (4.12) によると  $A_n$  は外力ゆらぎの和で表されているので、それと同じ時刻の  $A_n$  との積の平均操作をとらない限り平均値はゼロになるからである。また、 $p$  が奇数の場合、平均はゼロになる。

このことをより詳しく考える。例えば、 $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_p$  を満たす項に着目しよう。ただし、 $p$  は偶数とする。このような項のうち  $k_1 \neq k_2$  となる項は上述の理由から必ずゼロである。この考察は、 $k_3$  と  $k_4$  以下にも成り立つので、結局、今注目している項のうちゼロでないものは、 $k_1 = k_2 \geq k_3 = k_4 \geq \dots \geq k_{p-1} = k_p$  を満たすものしかない。さらに、また同じ考察が別の大小関係についても成り立ち数値的には同じことなので、この大小関係の選び方の数を考慮して、

$$\sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_p=1}^n \simeq \frac{p!}{2^{p/2}(p/2)!} \sum_{k_1=k_2 \geq k_3=k_4 \geq \dots \geq k_{p-1}=k_p} \quad (4.19)$$

のように、和の取り方を変えられそうである。ただ、ここで  $\simeq$  の記号を使ったのは、右辺の見積もりでは数字の組  $\{k_1, k_2, \dots, k_p\}$  のうちの4つ以上が等しい場合に対応する項を重複して数えることになるからである。このため、一般の  $p$  次のモーメントの完全な計算にはこのような組み合わせに関する困難を乗り越える必要が生じる。

ここでは最も容易な2次のモーメントの計算について行うことにする。2次のモーメントの場合、上の考察から、式 (4.18) の和のうち  $k_1 = k_2$  (この場合  $p=2$  に注意) の項しか残らず、上述の大小関係の並び替えなど考慮する必要もない。結局  $p=2$  の場合、(4.18) 式は、

$$\langle (W_n)^2 \rangle = \sum_{k=-1}^{n-2} \langle G^2(n, n-k-1) A_{n-k-1}^2 \rangle \quad (4.20)$$

となる。そこで、外力  $f_i$  に関する平均操作のみを先にとることを考える。 $f_i$  を含んでいるのは、 $A_{n-k_i+1}^2$  だけなので、その部分のみを考えればよい。その表式 (4.12) から、 $\langle f_i f_j \rangle = \langle f^2 \rangle \delta_{ij} / \Delta t_f$  を使うことにより、

$$\begin{aligned} \langle A_{n-k-1}^2 \rangle_{\omega_{n-k-1}} &= \frac{\langle f^2 \rangle}{\omega_{n-k-1}^2} \left(1 - e^{-\omega_{n-k-1} \Delta t_f}\right)^2 \sum_{k=0}^{m-1} e^{-2k\omega_{n-k-1} \Delta t_f} \\ &= \frac{\langle f^2 \rangle}{\omega_{n-k-1}^2} \left(1 - e^{-\omega_{n-k-1} \Delta t_f}\right)^2 \frac{1 - e^{-2m\omega_{n-k-1} \Delta t_f}}{1 - e^{-2\omega_{n-k-1} \Delta t_f}} \\ &\equiv P_{\omega_{n-k-1}} \end{aligned} \quad (4.21)$$



が得られる。この (4.21) を (4.20) に代入することにより、

$$\langle (W_n)^2 \rangle = \sum_{k=-1}^{n-2} \langle G^2(n, n-k-1) P_{\omega_{n-k-1}} \rangle \quad (4.22)$$

が得られる。

この平均値をあからさまな形で得るために、いくつかの極限を考える。まず、第2章でも行ったように  $\Delta t_f$  が微小な場合を考えよう。ただし  $m\Delta t_f = \Delta t_\omega$  を一定に保ちながらである。(2.49) のような近似式と  $\langle f_i^2 \rangle = f^2/\Delta t_f$  から容易に、

$$\lim_{\Delta t_f \rightarrow 0} P_{\omega_{n-k-1}} = f^2 \frac{1 - e^{-2\omega_{n-k+1}\Delta t_\omega}}{2\omega_{n-k+1}} \quad (4.23)$$

が得られる。さらにこれを  $\Delta t_\omega$  で展開すると、

$$P_{\omega_{n-k-1}} \simeq \{\Delta t_\omega - \omega_{n-k+1}\Delta t_\omega^2 + o(\Delta t_\omega^2)\}f^2 \quad (4.24)$$

が得られる。ここで  $\Delta t_\omega$  よる展開の低次項の近似を行うことは、一見非常に特殊な状況を考えているように思えるが、必ずしもそうではない。というのは、 $\Delta t_\omega$  の大きいような場合に対する考察も、 $\Delta t_\omega$  が非常に小さいものの  $\omega_n$  の時間相関が強いために  $n$  に対する  $\omega_n$  の変動の仕方が非常にゆっくりである場合の考察で代用できると考えられるからである。そこで、以下の計算は (4.24) の第一項  $\Delta t_\omega$  のみを考慮して行う。

上述の操作と、 $G(n, n-l)$  の定義 (4.17)、 $B_n$  の定義 (4.13) を (4.20) に代入することにより、

$$\begin{aligned} \langle (W_n)^2 \rangle &= \sum_{k=-1}^{n-2} \left\langle \prod_{i=n-k}^n e^{-2\omega_i \Delta t_\omega} \right\rangle \Delta t_\omega f^2 \\ &= \sum_{k=-1}^{n-2} \left\langle \exp \left( \sum_{i=n-k}^n -2\omega_i \Delta t_\omega \right) \right\rangle \Delta t_\omega f^2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

が得られる。さらにこれをキュムラント展開し、その2次で近似すると、

$$\langle (W_n)^2 \rangle = \sum_{k=-1}^{n-2} \exp(-2\omega_0 \Delta t_\omega n) \exp \left( \left\langle \frac{1}{2} \left( \sum_{i=n-k}^n -2\Delta\omega_i \Delta t_\omega \right) \left( \sum_{i'=n-k}^n -2\Delta\omega_{i'} \Delta t_\omega \right) \right\rangle \right) \Delta t_\omega f^2 \quad (4.26)$$

となる。ここで  $\omega_0$  は  $\omega_i$  の平均値、 $\Delta\omega_i$  は平均値からのはずれを意味する。ここで行ったキュムラント近似は、 $\Delta\omega_i$  がガウス過程ならば近似ではないことにも注意しておきたい。

2次モーメントの振る舞いを調べるにあたって、まずは取り扱いの易しい  $\Delta\omega_i$  に時間相関がない場合を考え、次に  $\Delta\omega_i$  に時間相関がある場合を考察することにする。



### 1. $\Delta\omega_i$ に時間相関がない場合

この場合には (4.26) の指数における和のうちクロスタームはゼロになる。したがって、ゆらぎの定常性を考慮することによって、

$$\begin{aligned}\langle (W_n)^2 \rangle &= \exp(-2\omega_0 \Delta t_\omega n) \sum_{k=-1}^{n-2} \exp\left(2 \left\langle \sum_{i=n-k}^n \Delta\omega_i^2 \Delta t_\omega^2 \right\rangle\right) \Delta t_\omega f^2 \\ &= \exp(-2\omega_0 \Delta t_\omega n) \sum_{k=-1}^{n-2} \exp((k+1)2 \langle \Delta\omega^2 \rangle \Delta t_\omega^2) \Delta t_\omega f^2 \\ &= \exp(-2\omega_0 \Delta t_\omega n) \frac{1 - e^{2n \langle \Delta\omega^2 \rangle \Delta t_\omega^2}}{1 - e^{2 \langle \Delta\omega^2 \rangle \Delta t_\omega^2}} \Delta t_\omega f^2\end{aligned}\quad (4.27)$$

が得られる。なお、最後の変化で、 $\Delta t_\omega$  が小さいことを考慮して、 $n\Delta t_\omega = t$  とおくと  $t$  に関する積分の定義に近似できるので、

$$\begin{aligned}\langle (W(t))^2 \rangle &= \exp(-2\omega_0 t) \int_0^t \exp(2 \langle \Delta\omega^2 \rangle \Delta t_\omega t') dt' \Delta t_f \langle f^2 \rangle \\ &= \exp(-2\omega_0 t) \frac{e^{2 \langle \Delta\omega^2 \rangle \Delta t_\omega t} - 1}{2 \langle \Delta\omega^2 \rangle \Delta t_\omega} \Delta t_f \langle f^2 \rangle\end{aligned}\quad (4.28)$$

と考えることもできることも指摘しておく。この表式は (4.27) 式で分母を  $\Delta t_\omega$  で展開して得られるものと同じものである。

これらの2次モーメントの表式の  $t$  に対する変化を調べると、すぐにわかるように、条件、

$$\omega_0 < \langle \Delta\omega^2 \rangle \Delta t_\omega \quad (4.29)$$

のもとでは、 $t \rightarrow \infty$  で発散する。この表式から  $\Delta t_\omega$  が十分に大きいといつでも発散が起これと解釈してはならない。なぜなら、導出方法からわかるようにこの結果は  $\Delta t_\omega$  が十分小さい時のみに妥当なものだからである。

### 2. $\Delta\omega_i$ に時間相関がない場合

この場合、(4.26) 式の指数における和のうちクロスタームの扱いを考える必要がある。そこで、まず相関の仕方を指数関数的な減衰形と仮定しよう。

$$\langle \Delta\omega_i \Delta\omega_j \rangle = \langle (\Delta\omega)^2 \rangle \exp(-|i-j| \Delta t_\omega / \tau) \quad (4.30)$$

いま必要な計算は、この量を  $ij$  の組み合わせで和をとることである。そこで次のような量を導入する。

$$\kappa = \sum_{i=j+1}^{\infty} \langle (\Delta\omega)^2 \rangle \exp(-|i-j| \Delta t_\omega / \tau) \quad (4.31)$$



ここでゆらぎの定常性から  $\kappa$  は  $j$  によらない定数である。この  $\kappa$  を用いて、次のように (4.26) の和の中の指数部分を近似的に書くことができる。

$$\left\langle \left( \sum_{i=n-k}^n -2\Delta\omega_i \Delta t_\omega \right) \left( \sum_{i'=n-k}^n -2\Delta\omega_{i'} \Delta t_\omega \right) \right\rangle \simeq (k+1) \langle (\Delta\omega)^2 \rangle \Delta t_\omega^2 + (k+1)\kappa \Delta t_\omega^2 \quad (4.32)$$

この式 (4.32) が近似である理由は、その左辺において  $i$  や  $i'$  が  $n-k+1$  や  $n$  に近いような項から生じるクロスタームを (4.31) のような無限の和で見積もることが誤差を生じさせるからである。この近似が妥当性を持つためには、まず  $\tau_\omega$  が十分小さくて、(4.31) の無限個の和が、少ない項数の和で十分近似できることが必要である。極端な場合、 $\tau$  がゼロであれば、(4.32) の左辺 2 項目はゼロになり、上述の  $\Delta\omega_i$  に時間相関のない場合に帰着し、(4.32) は正確な式になる。ともかく、 $k$  が  $\tau_\omega/\Delta t_\omega$  よりずっと大きいと、誤差を生じさせる項は少なくなるであろう。この見積もりを用いて  $\langle (W_n)^2 \rangle$  を前と同様に計算すると、

$$\begin{aligned} \langle (W_n)^2 \rangle &\simeq \exp(-2\omega_0 \Delta t_\omega n) \sum_{k=-1}^{n-2} \exp((k+1)2 \langle \Delta\omega^2 \rangle \Delta t_\omega^2 + (k+1)\kappa \Delta t_\omega^2) \Delta t_\omega f^2 \\ &= \exp(-2\omega_0 \Delta t_\omega n) \frac{1 - e^{2n\Delta t_\omega^2 (\langle \Delta\omega^2 \rangle + \kappa)}}{1 - e^{(2\langle \Delta\omega^2 \rangle + \kappa)\Delta t_\omega^2}} \Delta t_\omega f^2 \end{aligned} \quad (4.33)$$

が得られる。この近似的計算において  $k$  について和をとる時、 $k$  の小さい項では (4.32) の近似式がそれ程正しくない。従って、(4.33) が特に正当性を持つのは、 $k$  について和のうち  $k$  の大きな項が大きく寄与する場合である。

結局 2 次モーメントの発散条件が、

$$\omega_0 < (\langle (\Delta\omega)^2 \rangle + \kappa/2) \Delta t_\omega \quad (4.34)$$

と得られる。この結果は (4.29) に補正  $\kappa$  を加えた形になっているが、ここでも当然  $\Delta t_\omega$  が小さい場合の表式であることに注意せねばならない。

#### 4.3.2 2 階線形確率微分方程式による扱い

前小節の結果は全て、基本となる運動方程式 (4.6) 式において、2 階の微分を無視した場合 (4.8) の結果であった。そのような扱いは弾性体の質量が非常に小さいなどの限られた状況し



か記述しないであろう。この小節では、第2章、第3章の結果をそのまま(4.6)に適用した結果について論じる。

まず、(2.1)と(4.6)の比較から、記号の対応は、

$$\omega^{(j)2}(t) = \left( -(j\pi/L)^2 P_0 + (j\pi/L)^4 EI + (j\pi/L)^2 p(t) \right) / m \quad (4.35)$$

$$\alpha = \eta / m \quad (4.36)$$

$$f^{(j)}(t) = -q_j(t) / m \quad (4.37)$$

である。したがって、 $\omega^{(j)2}(t)$ の平均値 $\omega_{0j}^2$ 、ゆらぎの大きさ $\langle \Delta \omega^2 \rangle_j$ 、 $f$ のゆらぎの大きさ $\langle f^2 \rangle_j$ は、それぞれ、

$$\omega_{0j}^2 = \left( (j\pi/L)^4 EI - (j\pi/L)^2 P_0 \right) / m \quad (4.38)$$

$$\langle (\Delta \omega^2)^2 \rangle_j = (j\pi/L)^4 \langle p^2 \rangle / m^2 \quad (4.39)$$

$$\langle \Delta f^2 \rangle_j = \langle q_j^2 \rangle / m \quad (4.40)$$

となっている。さらに、第2章では振動数ゆらぎを $\omega_0(1+\epsilon)$ で表現していたことから、 $\Delta \omega^2 = \omega_0^2 \epsilon$ となることに注意して、

$$\left( (j\pi/L)^4 EI - (j\pi/L)^2 P_0 \right)^2 \langle \epsilon^2 \rangle = (j\pi/L)^4 \langle p^2 \rangle \quad (4.41)$$

という対応関係がある。

外力ゆらぎと振動数ゆらぎを持つ線形振動子の2次モーメントの発散条件は、 $\alpha = \eta/m$ に対し $\omega_0^2 = ((j\pi/L)^4 EI - (j\pi/L)^2 P_0) / m$ が十分に大きく、なおかつ適度な $\Delta t_\omega$ のもとで $\epsilon$ が閾値 $\epsilon_c$ を越えることであった。つまり、これらの対応関係から2次モーメントの発散について論じることができる。

### 4.3.3 結果の比較

前2つの小節の結果を比べるために、1階線形確率微分方程式による扱いの結果を弾性円柱に関するパラメタで表現し直しておく。1階線形確率微分方程式で便宜的においた記号 $\omega_n$ や $f_n$ の定義は、式(4.9)の上と、(4.6)の下より、

$$\omega(t) = (a_j + \xi_j(t)) / \eta = \left( -(j\pi/L)^2 P_0 + (j\pi/L)^4 EI + (j\pi/L)^2 p(t) \right) / \eta \quad (4.42)$$



$$f(t) = -q_j(t)/\eta \quad (4.43)$$

となっている。したがって、(考察のために、以下必要なものにはもう一度フーリエ展開の波数の添え字  $j$  を添えることにして)、 $\omega_n$  の平均値  $\omega_{0j}$ 、ゆらぎの大きさ  $\langle \Delta\omega^2 \rangle_j$ 、 $f$  のゆらぎの大きさ  $\langle f^2 \rangle_j$  は、それぞれ、

$$\omega_{0j} = \left( -(j\pi/L)^2 P_0 + (j\pi/L)^4 EI \right) / \eta \quad (4.44)$$

$$\langle \Delta\omega^2 \rangle_j = (j\pi/L)^4 \langle p^2 \rangle / \eta^2 \quad (4.45)$$

$$\langle \Delta f^2 \rangle_j = \langle q_j^2 \rangle / \eta^2 \quad (4.46)$$

となっている。したがって、 $\omega_n$  に時間相関のない場合の結果の場合であれば、(4.29) からすぐに、2 次モーメント発散の条件が、

$$\left( -P_0 + (j\pi/L)^2 EI \right) < (j\pi/L)^2 \langle p^2 \rangle \Delta t_\omega / \eta \quad (4.47)$$

と求められる。

定性的な面で 1 階微分の形式と 2 階微分の形式の結果を比較しよう。まず、両者とも共通して粘性  $\eta$  が 2 次モーメントの発散を抑える働きを持つことを示している。このことは、1 階微分の扱いの場合には結果式 (4.47) から直接わかるし、2 階微分の扱いの場合には、2 次モーメントの発散のためには  $\alpha = \eta/m$  に対し  $\omega_0^2 = ((j\pi/L)^4 EI - (j\pi/L)^2 P_0) / m$  が十分に大きくなければならないという 2.6 節の結論からわかる。

2 つの結果の相違点も当然ある。1 階微分の扱いによる条件式 (4.47) では、任意の小さな  $\Delta t_\omega$ 、任意の  $\eta$  に対し  $\langle (\Delta\omega)^2 \rangle$  が十分大きければ 2 次のモーメントの発散があり得ることを示している。しかし第 2 章で示したように、2 階の微分方程式から出発すると 2 次のモーメントの発散のためには  $\Delta t_\omega$  と  $\eta$  には厳しい条件が必要なのである。(4.41) を整理すると 2 次のモーメントの発散の条件が、

$$\left( (j\pi/L)^2 EI - P_0 \right)^2 \epsilon_c^2 < \langle p^2 \rangle \quad (4.48)$$

と書けよう。しかしこの式中の閾値  $\epsilon_c$  の値は込み入った  $\Delta t_\omega$  と  $\eta$  と  $\omega_0^{(j)}$  の関数であり、 $\eta$  と  $\omega_0^{(j)}$  の大小関係いかんでは存在しないことさえもあり得る。したがって、1 階の微分方程式の扱いの場合の結果に比べて非常に込み入った条件となっている。



しかし、(4.47) と (4.48) を比べるのは興味深い。というのも (4.48) において、 $\epsilon_c^2$  を  $\eta / ((j\pi/L)^2 EI - P_0) (j\pi/L)^2 \Delta t_\omega$  で置き換えると、(4.47) が得られるからである。すなわち、1 階微分の扱いによる 2 次モーメントの発散条件式 (4.47) は、本来は込み入った関数である  $\epsilon_c^2$  を  $\eta / (j\pi/L)^2 \Delta t_\omega$  で置き換えたような簡便な表式であると解釈できるのである。

## 4.4 弾性円柱の不安定性

前節までに得られた 2 次モーメントの発散の条件を基にして、問題となっている弾性円柱の横方向変位の不安定性について簡単に考察することにする。いま得られているのは、横方向変位の円柱軸方向の座標に関するフーリエ展開級数の波数  $j$  に対応する振幅に対する発散条件であり、当然その条件は波数  $j$  に依存する。もとの方程式が (4.6) なのだから、当然 2 階微分方程式による取り扱いの結果が正確なものである。しかしながら、その条件式 (4.48) における  $\epsilon_c$  は条件式 (2.63) のゼロ点から求まるような非常な込み入った表式であるため、理解は困難である。そこで、ここでは以下のような定性的議論を行うことにする。

小節 4.3.2 の最後でも触れたが、2.6 節での議論の結果、2 次モーメントの発散の最低条件として、 $\alpha = \eta/m$  に対し  $\omega_0^2 = ((j\pi/L)^4 EI - (j\pi/L)^2 P_0) / m$  が十分に大きいことが挙げられる。そこで、図. 4.2 に、この  $\omega_0^2$  を  $j$  に関してプロットして見た。図. 4.2 から、波数が大きい成分の振幅は激しく振動することが読み取れる。したがって、 $\alpha = \eta/m$  が十分に小さければ  $j$  の増大に伴い容易に 2 次モーメント発散の最低条件を満たせるように見える。

しかし、実際に  $j$  が大きいと容易に 2 次モーメントが発散するかと言えばそうではないことが、条件式 (4.48) に対する次のような簡単な考察からわかる。

もし  $j$  や  $\Delta t_\omega$  等の条件がうまく具合に揃い、 $\langle p^2 \rangle$  の大きさ次第では 2 次モーメントが発散する条件下にあるとすると、2.6 の結果からその時の閾値  $\epsilon_c$  はおよそ 1 から 0.5 付近にあると予想される。仮にこの程度の値を (4.48) 中の  $\epsilon_c$  に代入すれば、 $\langle p^2 \rangle$  閾値が  $((j\pi/L)^2 EI - P_0)^2$  程度と見積もれる。そこで、 $((j\pi/L)^2 EI - P_0)^2$  の逆数の  $j$  依存性を  $EI = 1$ 、 $EI = 5$ 、 $EI = 10$ 、の場合について図. 4.3 に図示する。

$\langle p^2 \rangle$  が閾値を越えて 2 次モーメントが発散するためには、 $((j\pi/L)^2 EI - P_0)^2 \langle p^2 \rangle \leq P_0^2$  より小さいこと、つまり、 $((j\pi/L)^2 EI - P_0)^2$  の逆数が  $\langle p^2 \rangle \leq P_0^2$  の逆数程度より大きいことが



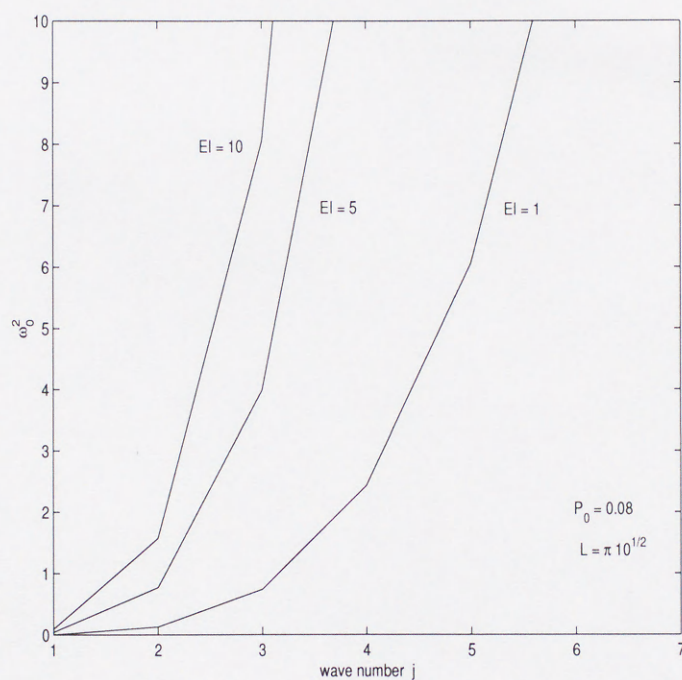


図. 4.2:  $\omega_0$  の波数依存性。パラメタは  $L = \pi\sqrt{10}P_0 = 0.08$  で、 $EI = 1, 5, 10$  の3つの場合が図示してある。2次モーメントが発散するためには、最低でも  $\alpha = \eta/m$  がこれらの値より小さくなければならない。



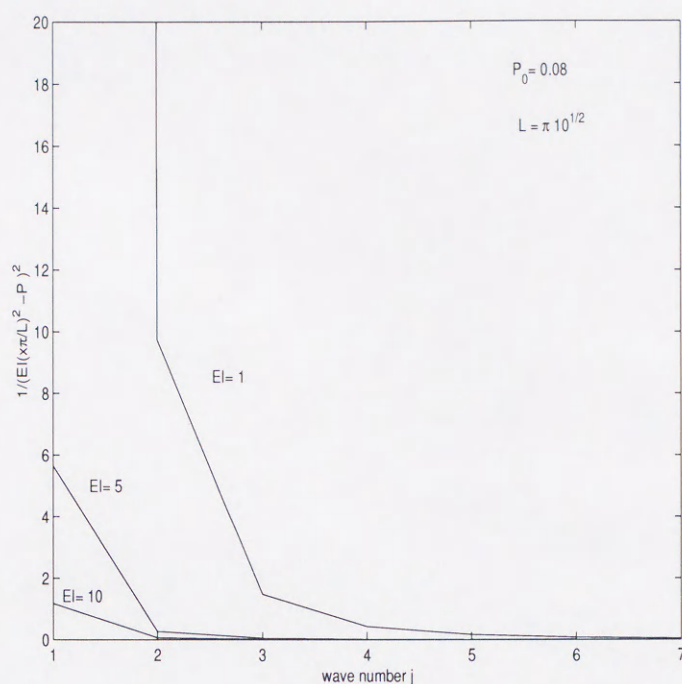


図. 4.3: 縦方向の力のゆらぎに対する 2 次モーメントの発散のしやすさの一つの指標。大きい方が縦方向の力のゆらぎに対し敏感である。パラメタは  $L = \pi\sqrt{10}P_0 = 0.08$  で、 $EI = 1, 5, 10$  の 3 つの場合が図示してある。 $EI = 1, j = 1$  の時は大きすぎて見えないが約 2500 程度になっている。

要求される。図. 4.3 の場合ではこの要求に近いのは  $EI = 1$  で  $j = 1$  の場合だけである。結局、図. 4.2 と図. 4.3 を合わせて見ると、2 次モーメントが発散するためには、 $((j\pi/L)^2 EI - P_0)^2$  の逆数が  $\langle p^2 \rangle \leq P_0^2$  の逆数程度より大きくなる程に  $EI$  が十分小さくしなければならず、かつその条件を満たす波数成分は殆ど  $j = 1$  ののみに限られ、さらに粘性も非常に小さくならねばならない、ということがわかる。このように 2 次モーメントの発散の可能性を示す波数成分やその他の条件  $EI$ 、 $\eta$ 、等は非常に限られるのである。

1 階微分方程式に基づいた結果は波数が小さい程モーメントが発散しやすい傾向を示してはいたが、このような厳しい条件なしに各波数成分の 2 次モーメントが発散する可能性も示していたので、発散条件としては妥当性を欠くと言わざるを得ない。ただし、この弾性円柱の問題から離れて考えると、2 階微分方程式に基づく結果は非常に込み入ったものになるのに対し、1 階微分方程式に基づいた結果は解析的に簡単なものになっていることは便利なこと



である。つまり、適切なモデル化の結果1階線形確率微分方程式で議論できるのならば、その結果について簡単かつ解析的な議論が可能となろう。

参考のために1階線形確率微分方程式の形式化で、2次モーメントの時間経過について記しておく。(4.27) から、その緩和時間  $\tau_j$  が、

$$\begin{aligned} 1/\tau_j &= 2 \langle \Delta \omega^2 \rangle \Delta t_\omega - 2\omega_0 \\ &= 2 \left( (j\pi/L)^4 \langle p^2 \rangle \Delta t_\omega / \eta^2 - ((j\pi/L)^2 P_0 - (j\pi/L)^4 EI) / \eta \right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

と得られる。

## 4.5 本章のまとめ

本章では、2つの壁面に固定され、なおかつその軸方向と軸に垂直方向にランダム力を受けた弾性円柱の横方向変位の運動の解析に本研究の方法を適用し、横方向変位の不安定性について論じた。この時、波数成分  $j$  を持つ振幅の大きさ  $w_j(t)$  に関する運動方程式(4.6)を解析の出発点とした。特に加速度の項を無視した運動方程式は1階線形確率微分方程式で書け、その解析には本研究の方法が非常に有効であることがわかった。

結論としては、さまざまな波数成分のうち、2次モーメントが発散する可能性のある波数成分は殆ど  $j=1$  の場合のみに限られ、かつ、 $EI$  が十分小さくなくてはならず、さらに粘性も非常に小さくならねばならない。加速度の項を無視した運動方程式は1階線形確率微分方程式に基づく近似的理論は、解析的な扱いやすさや、粘性や波数が小さい方が2次モーメントの発散が起こりやすいなどの定性的結果を簡便に導く点で有効ではあるが、2次モーメントの発散点の記述は不正確である。

しかしながら、本章で1階線形確率微分方程式の解析法が詳しく調べられたことは意義深いことである。その応用範囲は広く、また、 $p$  次のモーメントの導出などより詳しい確率過程の解析の出発点となる可能性もあるからである。



## 第5章 結論

本論文では、2つのゆらぎ源を持つ系のダイナミクスの複雑な挙動を調べるため、その典型例であるランダムな外力ゆらぎと振動数ゆらぎを持つ線形振動子の従来とは異なる統計的解析法を提案し、それによって得られる様々な結果について述べてきた。それらの結果の中でも、本研究の解析法によって外力ゆらぎと振動数ゆらぎを持つ線形振動子の変位の2次モーメントが厳密な解析的表式で得られたことは最も重要な点ある。この表式から複雑な挙動の一つと考えられる2次モーメントの発散条件が導かれ、確率密度関数のべき則の発生機構のシナリオが明らかにされたからである。

本論文の統計的解析法の出発点となるのは、確率的なゆらぎが離散的な時刻上で生じるという仮定と、振動数ゆらぎと外力ゆらぎの変動する時間のオーダーを規定する関係式(2.9)である。これらの仮定により、ゆらぎの標本関数を規定すると運動方程式が解析的に積分できるようになる。この定式化に基づいて統計操作やシミュレーションを具体的に行うことができた。

この方法に基づき、まず第2章では外力ゆらぎと振動数ゆらぎを持つ線形振動子の変位に関する2次モーメントの平衡値が導出法が説明され、第3章では、その振動子の時間変化に関する統計的性質が、2次モーメントの緩和過程、パワースペクトル(自己相関関数)、確率密度関数、の3つの観点から議論された。第4章では、前章までの解析法が粘性流体中の弾性円柱の振動問題に適用された。以上の解析結果から得られた主要な結論は、以下のようにまとめられる。

1. ゆらぎに時間相関のない状況下で、外力ゆらぎのみが存在する場合と、外力ゆらぎと振動数ゆらぎの両者が存在する場合、それぞれに対して、2次モーメントの平衡値が厳密に導出され、後者においては前者に見られない2次モーメントの発散が起きうることが示された。また、その2次モーメントの発散の条件式も厳密に得ることができた。



2. 時間相関のある振動数ゆらぎの場合に対する2次モーメントの近似計算法が提案された。この近似法は振動数ゆらぎの強度が小さい場合でしか有効ではないが、2次モーメントの発散機構に関する理論的考察に役立つことがわかった。
3. 2次モーメントの近似法により、振動数ゆらぎが大きくなると振動子の変位には長時間相関が現れることが予想できた。近似法を適用すると自己相関関数が異なる時間定数で減衰する指数関数の重ねあわせで表現できることによる推測である。
4. 2次モーメント発散条件下における臨界緩和現象が、2次モーメントの時間変化に関する理論的考察と、数値シミュレーションによる確率密度関数の観測から示された。
5. 数値シミュレーションにより、2次モーメントの発散条件下での確率密度関数のべき則が見出され、2次モーメントの発散の振る舞いとべき則の関連が実証された。
6. 本論文の方法は1階線形確率微分方程式にも容易に拡張できた。
7. 粘性流体中における弾性円柱振動問題の横変位の不安定性は、粘性の効果によって押さえられ、振動の波長に大きく依存することがわかった。

このように、2つのゆらぎ源を持つシステムに現れる、2次モーメントの発散で特徴付けられる不安定性の生成、確率密度関数のべき則の生成、それらに伴う臨界緩和、相関時間の増大、等、複雑な挙動が、解析的な表式からの理論的説明やシミュレーションにより理解された。これらの性質は複雑系一般においても見られるものであり、それが解析的な表式から議論できたことは重要である。

最後に、今後の課題を、本研究で取り上げた数理モデルのさらなる拡張とこのモデルの現実的問題への応用という2つの観点から述べることにする。本論文では2つのゆらぎ源が誘起するダイナミクスの複雑な挙動というものに注目してきた。しかし緒論でも述べたダイナミクスの複雑な挙動は、ゆらぎ源の存在だけでなく、運動方程式の非線形性や遅れの効果によっても引き起こされる。これらの効果は緒論で紹介したようなモデルでは重要な役割をしており、本研究に対する今後の研究課題となろう。実際、非線形の線形化した問題を扱うことは有意義ではあるが、非線形性をもろに取り入れないことには非線形問題の本質を扱うことはできない。これまでも、非線形性とゆらぎの効果の競合についていくつかの研究はなされているが[78]、それらの研究は数値シミュレーションによるものが殆どであり理論的には



十分解明されたとはいえない。また、遅れの効果を取り入れることは、ゆらぎの時間相関を取り入れることや、場合によっては非線形性を取り入れることに対応する。本研究の立場からこれらの点を考察すると、ゆらぎの時間相関や2つのゆらぎ間の相関などを考慮したり、摂動理論の出発点として使う方法などが考えられる。また、非線形性を含む方程式は変数変換によって線形化することが可能となる場合がある。この還元された線形確率微分方程式に本研究の解析法を適用し、非線形や遅れの効果を理論的に扱うことも可能であろう。

次に、現実の問題に対する本研究の数値モデルの応用という観点から論じる。本論文では具体的応用例として、粘性流体中の弾性円柱振動問題を扱ったが、この問題は理想的なモデルであり、実際には現実の確率的ゆらぎの様子やそれが体系に与える影響の深刻さを吟味した上で議論しなければならない。例えば物質の疲労の問題ならば、外部環境の変動が物質に与える影響を具体的に基本方程式の取り入れる必要がある。弾性円柱振動問題には、上で述べた非線形や遅れの効果を取り入れたゆらぎを取り入れる必要があろう。また、本論文の方法が1階確率微分方程式に容易に適用可能であったことも第4章で述べた重要な点である。このことは、弾性円柱振動問題の考察のみならず、緒論で述べたような1階確率微分方程式で記述されるモデルに対するゆらぎの相関や遅れの効果を取り入れた問題解決の第一歩となることが期待される。



## 付 録 A 乗数的ノイズの伊藤の解釈とストラトノビッチの解釈

次のようなホワイトノイズ  $W(t)$  を含む確率微分方程式があるとする。

$$\frac{dX(t)}{dt} = X(t) + f(X(t))W(t) \quad (\text{A.1})$$

この右辺第二項は乗数的ノイズになっていることに注意したい。この確率微分方程式を形式的に積分すると、

$$X(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau + \int_0^t f(X(\tau))W(\tau) d\tau \quad (\text{A.2})$$

と書けそうだが、右辺第二項の乗数的ノイズの積分  $\int_0^t f(X(\tau))W(\tau) d\tau$  というものに数学的な意味付けが行われないと、(A.1)、(A.2) の意味は曖昧なままである。ここでは、乗数的ノイズの積分  $\int_0^t f(X(\tau))W(\tau) d\tau$  にはいくつかの解釈があり、それに応じて数値が変わってしまうことを直感的に説明する。

微小時間  $d\tau = t' - t$  における増分を考える。まずホワイトノイズの増分  $dB$  を、

$$\begin{aligned} dB &= W(\tau) d\tau \\ &= W_t \sqrt{d\tau} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

のように考える。ここで  $W_t$  は離散時間  $t$  上で定義された確率変数である。ホワイトノイズを離散時間上で考えた時に、 $d\tau$  が  $\sqrt{d\tau}$  に変更されたのは、条件、

$$\langle dB^2 \rangle = \int_0^{d\tau} \int_0^{d\tau} dt dt' \langle W(t)W(t') \rangle = d\tau \quad (\text{A.4})$$

の条件を満たすためである。

次に (A.1) における  $X(t)$  の増分を考える。この時右辺にも  $X(t)$  が存在するので、仮に微小な時間間隔  $d\tau$  内の  $X(t)$  の値を、この時間区間の左端上（時間座標は左から右に進むと仮



定してある。) で代表させると、

$$dX = X(t)d\tau + f(X(t))W_t\sqrt{d\tau} \quad (\text{A.5})$$

となる。ところが、時間間隔  $d\tau$  内の  $X(t)$  の値を、この時間区間の中点上で代表させる、すなわち、

$$\tilde{X} = (1 - \alpha)X(t) + \alpha(X(t) + dX) = X(t) + \alpha dX \quad (\text{A.6})$$

で代表させると、

$$\begin{aligned} dX &= \tilde{X}d\tau + f(\tilde{X})W_t\sqrt{d\tau} \\ &= \tilde{X}d\tau + f(X(t) + \alpha dX)W_t\sqrt{d\tau} \\ &= \tilde{X}d\tau + f(X(t))W_t\sqrt{d\tau} + f'(X(t))W_t\alpha dX\sqrt{d\tau} \\ &= X(t)d\tau + f(X(t))W_t\sqrt{d\tau} + \alpha f'(X(t))f(X(t))W_t^2 d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

となる。ただし最後の行で  $o(\tau)$  となる項が無視してある。式 (A.5) と式 (A.7) を比べると、 $d\tau$  の係数が異なっている。式 (A.5) をは伊藤の解釈と呼ばれる。式 (A.7) で  $W_t^2 = 1$ 、 $\alpha = 1/2$  とおいたものはストラトノビッチの解釈と呼ばれる。ここで  $W_t^2 = 1$  とおいたのは、こうおいても式の二乗偏差が ( $d\tau$  の一次のオーダーで) ゼロになることにより正当化される。

$f(X(t))$  が定数、すなわち乗数的ノイズとはならない場合、式 (A.5) と式 (A.7) は違いがない。しかし、 $f(X(t))$  が  $X(t)$  の関数であれば、伊藤の解釈、ストラトノビッチの解釈で  $X(t)$  の増分は異なることになる。したがって、乗数的ノイズの積分は、これらの解釈を決めた上で初めて定義される。

(この付録は [79] を参考にした。)



## 付 録 B キュムラント展開

いくつかの確率変数  $X_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) を考える。ここでパラメタの組  $\{\eta_i\}_{i=1\dots N}$  を用いてこれらの確率変数から構成される確率変数  $\exp(\sum_i \eta_i X_i)$  を考えることができる。この平均値、

$$\left\langle \exp\left(\sum_i \eta_i X_i\right) \right\rangle \quad (\text{B.1})$$

は  $n$  変数モーメント母関数と呼ばれる。なぜなら、 $n$  変数モーメント母関数からモーメントが、

$$\langle X_{j_1} \cdots X_{j_l} \rangle = \frac{\partial}{\partial \eta_{j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \eta_{j_l}} \left\langle \exp\left(\sum_i \eta_i X_i\right) \right\rangle \Big|_{\eta_{j_1}=\dots=\eta_{j_l}=0} \quad (\text{B.2})$$

のように得られるからである。

したがって、全てのモーメントが存在するとすれば  $n$  変数モーメント母関数はパラメタに関して次のように展開できる。

$$\left\langle \exp\left(\sum_i \eta_i X_i\right) \right\rangle = \sum_{\{m_1, \dots, m_N\}} \left\langle X_{j_1}^{m_1} \cdots X_{j_N}^{m_N} \right\rangle \eta_{j_1}^{m_1} \cdots \eta_{j_N}^{m_N} / m_1! m_2! \cdots m_N! \quad (\text{B.3})$$

ただし、この和は整数の組  $\{m_1, \dots, m_N\}$  についてとられる。

さらに  $n$  変数モーメント母関数の対数を取りパラメタ  $\{\eta_i\}_{i=1\dots n}$  で展開することを試みる。すなわち、

$$\log \left\langle \exp\left(\sum_i \eta_i X_i\right) \right\rangle = \sum_{\{m_1, \dots, m_N\}} \left\langle X_{j_1}^{m_1} \cdots X_{j_N}^{m_N} \right\rangle_c \eta_{j_1}^{m_1} \cdots \eta_{j_N}^{m_N} / m_1! m_2! \cdots m_N! \quad (\text{B.4})$$

のような展開を考えるのである。この時の展開係数  $\langle X_{j_1} \cdots X_{j_n} \rangle_c$  をキュムラントと呼ぶ。これらの展開係数は、(B.3) の対数をとったものを  $\eta$  で展開したものと、(B.4) とを、直接係数比較することから得られる。例えば、

$$\langle X_1^2 \rangle_c = \langle X_1^2 \rangle - \langle X_1 \rangle^2 \quad (\text{B.5})$$



$$\langle X_1 X_2 X_3 \rangle_c = \langle X_1 X_2 X_3 \rangle - \langle X_1 \rangle \langle X_2 X_3 \rangle - \langle X_2 \rangle \langle X_3 X_1 \rangle - \langle X_3 \rangle \langle X_1 X_2 \rangle + 2 \langle X_1 \rangle \langle X_2 \rangle \langle X_3 \rangle \quad (B.6)$$

などとなる。これらは、すべてキュムラントの次数より低い次数のモーメントの積の和で書かれる。

次にキュムラント展開を  $\langle \exp(\sum_i \eta_i X_i) \rangle$  の近似式として用いることを考える。(B.3)をそのまま用いて、高次のモーメントの項を無視する方法が1つには考えられる(モーメントの有限次近似)。しかし、明らかに、 $\eta_i$  が大きい時には、高次のモーメントの項が展開式(B.3)に主要な寄与をするのでモーメントの有限次近似は精度は良いとはいえない。一方、キュムラント展開を用いて  $\langle \exp(\sum_i \eta_i X_i) \rangle$  を表した場合には、

$$\left\langle \exp\left(\sum_i \eta_i X_i\right) \right\rangle = \exp\left\{ \sum_{\{m_1, \dots, m_N\}} \left\langle X_{j_1}^{m_1} \cdots X_{j_N}^{m_N} \right\rangle_c \eta_{j_1}^{m_1} \cdots \eta_{j_N}^{m_N} / m_1! m_2! \cdots m_N! \right\} \quad (B.7)$$

となる。この式で高次のキュムラントを無視する近似をキュムラントの有限次近似とよぶ。

(B.7)では指数関数の肩で展開が行われているため、キュムラントの有限次近似は、 $\langle \exp(\sum_i \eta_i X_i) \rangle$  をキュムラントのべきからなる無限個の項で近似していることになる。このため、上述のモーメントの有限次近似よりは近似の精度が上がっていることが期待できる。とはいえ、 $\eta_i$  が大きくなるにつれて精度が悪くなることには変わらない。

しかしながら、確率変数  $X_i$  がガウス分布に従う時にはキュムラントの2次近似が正確なものになる。このことは次のようにわかる。例えば確率変数が1つならば、

$$\begin{aligned} \langle \exp \eta X \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle X^2 \rangle}} \int dX \exp \eta X \exp(-X^2/2 \langle X^2 \rangle) \\ &= \exp\left(\frac{\eta^2 \langle X^2 \rangle}{2}\right) \end{aligned} \quad (B.8)$$

となるので、 $\log \langle \exp \eta X \rangle = \frac{\eta^2 \langle X^2 \rangle}{2}$  が得られる。これとキュムラントの定義式(B.4)を係数比較することにより、2次のキュムラント以外は全てゼロとなるのである。確率変数が多数あっても同様である。(この付録は[80, 81]を参考にした。)



## 付 録 C Fokker-Planck 方程式の導出

定常マルコフ過程  $y(t)$  を考えよう。この時、ある初期時刻に状態が  $y_1$  にあった時、 $\tau$  秒後に状態が  $y_2$  付近の微小区間  $dy_2$  内にある確率を  $T_\tau(y_2|y_1)dy_2$  とおく。いま定常過程を考えているので  $T_\tau(y_2|y_1)$  は初期時刻の選び方に依存せず、時間差  $\tau$  に依存していることに注意したい。 $T_\tau(y_2|y_1)$  を次のように微小時間間隔  $\tau$  で展開する。

$$T_\tau(y_2|y_1) = \delta(y_2 - y_1) + (a_0\delta(y_2 - y_1) + W(y_2|y_1))\tau + o(\tau) \quad (C.1)$$

ここで1項目がデルタ関数になるのは、初期時刻で状態が  $y_1$  にあるという条件による。また2項目の  $a_0\tau$  は  $\tau$  秒経っても依然  $y_1$  に局在している確率の減少量である。なぜなら、 $y_2$  に関して (C.1) を  $y_1 - \epsilon$  から  $y_1 + \epsilon$  まで積分すると、

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{y_1 - \epsilon}^{y_1 + \epsilon} dy_2 T_\tau(y_2|y_1) &= 1 + a_0\tau + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{y_1 - \epsilon}^{y_1 + \epsilon} dy_2 W(y_2|y_1)\tau + 0 + o(\tau) \\ &= 1 + a_0\tau + o(\tau) \end{aligned} \quad (C.2)$$

となり、左辺は  $\tau$  秒経っても依然として  $y_1$  に局在している確率を表すからである。逆に  $W(y_2|y_1)$  は単位時間あたりに  $y_1$  から  $y_2$  に遷移する確率を表していることもわかる。

また、(C.1) の両辺を  $y_2$  で積分して、規格化条件  $\int dy_2 T_\tau(y_2|y_1) = 1$  を使うと、

$$a_0(y_1) = - \int dy_2 W(y_2|y_1) \quad (C.3)$$

がわかる。

ここで定常マルコフ過程で一般に成り立つ Chapman-Kolmogorov 方程式、

$$T_{\tau+\tau'}(y_3|y_1) = \int dy_2 T_\tau(y_3|y_2) T_{\tau'}(y_2|y_1) \quad (C.4)$$

の  $T_\tau(y_3|y_2)$  に (C.1) を代入すると、

$$T_{\tau+\tau'}(y_3|y_1) = \int dy_2 \{ \delta(y_3 - y_2) + a_0\delta(y_3 - y_2) \} T_{\tau'}(y_2|y_1) + \int dy_2 W(y_3|y_2) T_{\tau'}(y_2|y_1)$$



$$= T_{\tau'}(y_3|y_1) + \int dy_2 \{W(y_3|y_2)T_{\tau'}(y_2|y_1) - W(y_2|y_1)T_{\tau'}(y_3|y_1)\}\tau + o(\tau) \quad (C.5)$$

となる。ただし、2行目で (C.3) を使った。

したがって、微小な  $\tau$  を考えると、

$$\frac{\partial}{\partial \tau} T_{\tau}(y_3|y_1) = \int dy_2 \{W(y_3|y_2)T_{\tau'}(y_2|y_1) - W(y_2|y_1)T_{\tau'}(y_3|y_1)\} \quad (C.6)$$

を得る。

(C.6) は、マスター方程式と呼ばれる。この式は微分方程式の形としては初期条件  $y_1$  によらず成り立つので、ある初期条件が与えられた時の確率密度関数を  $P(y, t)$  として、

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t) = \int dy' \{W(y|y')P(y', t) - W(y'|y)P(y, t)\} \quad (C.7)$$

とも書きなおせる。さらに、 $W(y'|y)$  は条件  $y$  とジャンプ距離  $y - y' = r$  のみに依存する関数であるから、 $W(y'|y) = W(-r, y)$  と書き直す。すると  $W(y|y')$  の方は、 $W(y|y') = W(r, y - r)$  と書き直されることになる。ここで、 $W(r, y)$  が左の引数であるジャンプ距離  $r$  に関しては急激に減少する関数であり、右の引数である場所の条件  $y$  に関してはゆっくり変動する関数であると仮定する。そうして、(C.7) における積分変数  $y'$  を  $r = y - y'$  に変換した上で、一項目を  $r$  に関してテーラー展開すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(y, t) &\simeq \int dr \{W(r, y)P(y, t) - r \frac{\partial}{\partial y} W(r, y)P(y, t) \\ &\quad + (1/2)r^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} W(-r, y)P(y, t)\} - \int dr W(r, y)P(y, t) \\ &\simeq - \int dr r \frac{\partial}{\partial y} W(r, y)P(y, t) + (1/2) \int dr r^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} W(r, y)P(y, t) \end{aligned} \quad (C.8)$$

となる。この変化で  $r$  の3次以上を無視した理由は、上述の仮定より  $r$  に関して積分をとる際、 $W(r, y)$  の積分への寄与が  $r \simeq 0$  付近からしかないからである。

(C.8) の積分中で、さらに  $r$  の高次まで考慮した方程式も考えられるが、 $r$  の2次まで考慮したような (C.8) を Fokker-Planck 方程式という。したがって、Fokker-Planck 方程式は2つの量、 $\int dr r W(r, y)$  と  $\int dr r^2 W(r, y)$  で特徴づけられる。

(この付録は [37] を参考にした。)



## 参考文献

- [1] ジャン・ペラン (玉蟲文一訳), 原子 (岩波文庫、1978) 原書は1913
- [2] W. Nernst, Z. Phys. Chem. **9** 613 (1884)
- [3] H. Nyquist, Phys. Rev. **32** 110 (1928)
- [4] A. Einstein (Edited by R. Fürth), *Investigation on the theory of Brownian movement* (Dover, 1956)
- [5] M. v. Smoluchowski, Phys. Zeits. **17** 557 (1916)
- [6] M. S. Green, J. Chem. Phys. **20** 1281 (1952)
- [7] R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan **12** 570 (1957)
- [8] G.E. Uhlenbeck, L.S. Ornstein, Phys. Rev. **36** 823-841 (1930)
- [9] P. Flude *et al.*, Phys. Rev. Lett. **35** 1776 (1975)
- [10] W. Dieterich, P. Flude and I. Peschel, Adv. Phys. **29** 527 (1980)
- [11] V. Ambegaokar and B. I. Halperin, Phys. Rev. Lett. **22** 1364 (1969)
- [12] M. J. Stephen, Phys. Rev. **186** 393 (1969)
- [13] D. Rogovin and D. J. Scalapino, Ann. Phys. (New York) **86** 1 (1974)
- [14] M. O. Magnasco, Phys. Rev. Lett. **71** 1477 (1993)
- [15] C. R. Doering, W. Horsthemke, and J. Riordan, Phys. Rev. Lett. **72** 2984 (1994)



- [16] K. Sekimoto, J. Phys. Soc. Jpn. **66** 1234 (1997)
- [17] H. Risken and K. Voigtlaender, J. Stat. Phys. **41** 825 (1985)
- [18] M. I. Dykman, S. M. Soskin, and M. A. Krivoglaz, Physica **133 A** 53-73 (1985)
- [19] M. I. Dykman, R. Mannella, and P. V. E. McClintock, Phys. Rev. **37 A** 1303 (1988)
- [20] H. Risken, *The Fokker-Planck equation* (Springer-Verlag, 1989)
- [21] U. Frish, *Probabilistic methods in applied mathematics* (Academic press, New York, 1968)pp. 75-198
- [22] A. D. Wheelon, J. Res. Nat. Bur. Standards. Sect. D **63** 205-233 (1959)
- [23] 進士昌明 編著, 無線通信の電波伝播 (電子情報通信学会, 1992)
- [24] R. C. Bourret, Nuovo Cimento **26** 1 (1962)
- [25] R. C. Bourret, Canad. J. Phys. **40** 782 (1962)
- [26] W. C. Hoffman<sup>1</sup>, Proc. Symp. Appl. Math **16** 117 (1964)
- [27] J. B. Keller, Proc. Symp. Appl. Math **13** 227 (1962)
- [28] P. G. Bergmann, Phys. Rev. **70** 486 (1946)
- [29] I. Kay and R. A. Silverman, Nuovo Cimento(10) Suppl.**9** 537 (1964)
- [30] J. Bazer, J. Soc. Indust. Appl. Math **12** 539 (1964)
- [31] edited by V. I. Tataraskii, A. Ishimaru, V. U. Zavorotny, *Wave propagation in random media(scintillation)* (IPP, 1993)
- [32] B. Øksendal, *Stochastic differential equation -An introduction with applications* (Springer, 1998)



- [33] J. L. Doob, *Classical potential theory and its probabilistic counterpart* (Springer-Verlag, 1984)
- [34] A. H. Sato and H. Takayasu, *Physica* **250 A** 231 (1998)
- [35] M. H. R. Stanley *et al*, *Nature*(London) **379** 804 (1996)
- [36] M. Takayasu, H. Takayasu, A. H. Sato, *Physica* **233 A** 824 (1996)
- [37] N. G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (NH PL, 1997)
- [38] T. Shimizu, *Physica A* **164** 123 (1989)
- [39] I. Iwasaki, H. Nakajima, T. Shimizu, *Int. J. Bifur. Chaos* **8** 791 (1998)
- [40] M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **18** 25 (1978)
- [41] C. Bech and F. Schlögl, *Thermodynamics of chaotic systems* (Cambridge, 1993)
- [42] M. W. Derstine, H. M. Gibbs, F. A. Hopf, and D. L. Kaplan, *Phys. Rev.* **26 A** 3720 (1982)
- [43] K. Pyragas, *Phys. Lett.* **170 A** 421 (1992)
- [44] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakamura, A. Shibata, and Y. Sugiura, *Phys. Rev.* **51 E** 1035 (1995)
- [45] B. H. Wang and P. M. Hui, *J. Phys. Soc. Jpn.* **66** 1238 (1997)
- [46] W. Horsthemke and R. Lefever. *Noise-induced transition : theory and application in physics, chemistry and biology* (Springer-Verlag , 1984)
- [47] R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani, *J. Phys. A* **14** L453 (1981)
- [48] A. R. Bulsara and L. Gammaitoni, *Phys. Today.* **49** No.3, 39 (1996)
- [49] J. J. Collins, T. T. Imhoff, and P. Grigg, *Phys. Rev. E* **56** 923 (1997)



- [50] B. J. Gluckman, *et al* , Phys. Rev. Lett. **77** 4098 (1996)
- [51] H. Takayasu, A. Sato, and M. Takayasu, Phys. Rev. Lett. **79** 966 (1997)
- [52] R. Bourret, Physica **54** 623-629 (1971)
- [53] R. Bourret, U. Frish and A. Pouquet, Physica **65** 303-320 (1973)
- [54] B. J. West, K. Lindenberg and V. Seshadri Physica **102A** 470 (1980)
- [55] J.M. Deutsch, Phys. Rev. Lett. **69** 1536 (1992)
- [56] M. Takayasu, H. Takayasu, and T. Sato, Physica **233A** 824 (1996)
- [57] R. F. Fox, Phys.Rev. **A 34** 3405 (1986)
- [58] S.Q. Zhu, Phys. Rev. **A41** 1689 (1990)
- [59] V.D. Potapov, *Stability of Stochastic Elastic and Viscoelastic Systems* (Wiley, 1999)
- [60] I. T. Drummond, J. Phys. A **25** 2273 (1992)
- [61] J.M. Deutsch, Physica **208A** 433 (1993)
- [62] H. Hara, S. D. Choi and Y. C. Chung, Physica **144A** 481 (1987)
- [63] H. Hara and T. Obata, J. Korean Phys. Soc.**28** S348-S353 (1995)
- [64] 高安秀樹, フラクタル(朝倉書店, 1986)
- [65] 武者利光, ゆらぎの世界(講談社, 1980)
- [66] N. Ikeda, To be published in J. Phys. **A**
- [67] M. C. Wang and G. E. Uhlenbeck, Rev. Mod. Phys. **17** 323-342 (1945)
- [68] 太田隆夫, 非平衡系の物理学(裳華房, 2000) pp. 37



- [69] K. Lindenberg and B. J. West, *The Nonequilibrium Statistical Mechanics of Open and Closed Systems* (VCH, 1990) pp. 146
- [70] K. Lindenberg, V. Seshadri, and B. J. West, Phys. Rev. **A22** 2171 (1980)
- [71] J. Koyanma and H. Hara, Phys. Rev. **A46** 1844 (1992)
- [72] H. Hara and J. KOyama, Stat. Math. **39** 73 (1991)
- [73] P. Grassberger, Int. J. Theor. Phys. **25** 907 (1986)
- [74] H. Bronberg and R. Westlund, Int. J. Solids Structure **14** 365(1977)
- [75] Z. P. Bazant and F. ASCE, J. Eng. Mech. **112** 322 (1986)
- [76] ランダウ=リフシッツ、佐藤常三、他訳、弾性理論 (増補新版) (東京図書、1985) pp. 108
- [77] 中川鶴太郎、岩波全書・レオロジー (岩波、1978)
- [78] J. Freund, W. Ebeling, and K. Rateitschak, Phys. Rev. **E 54** 5561 (1996)
- [79] J. Honerkamp ; translated by K. Lindenberg, *Stochastic dynamical systems : concepts, numerical methods, data analysis* (VCH , 1994)
- [80] 阿部龍造, 統計力学 - 第2版 (東京大学出版会 , 1991)
- [81] 小倉久直, 確率過程入門(森北出版 , 1998)



## 謝辞

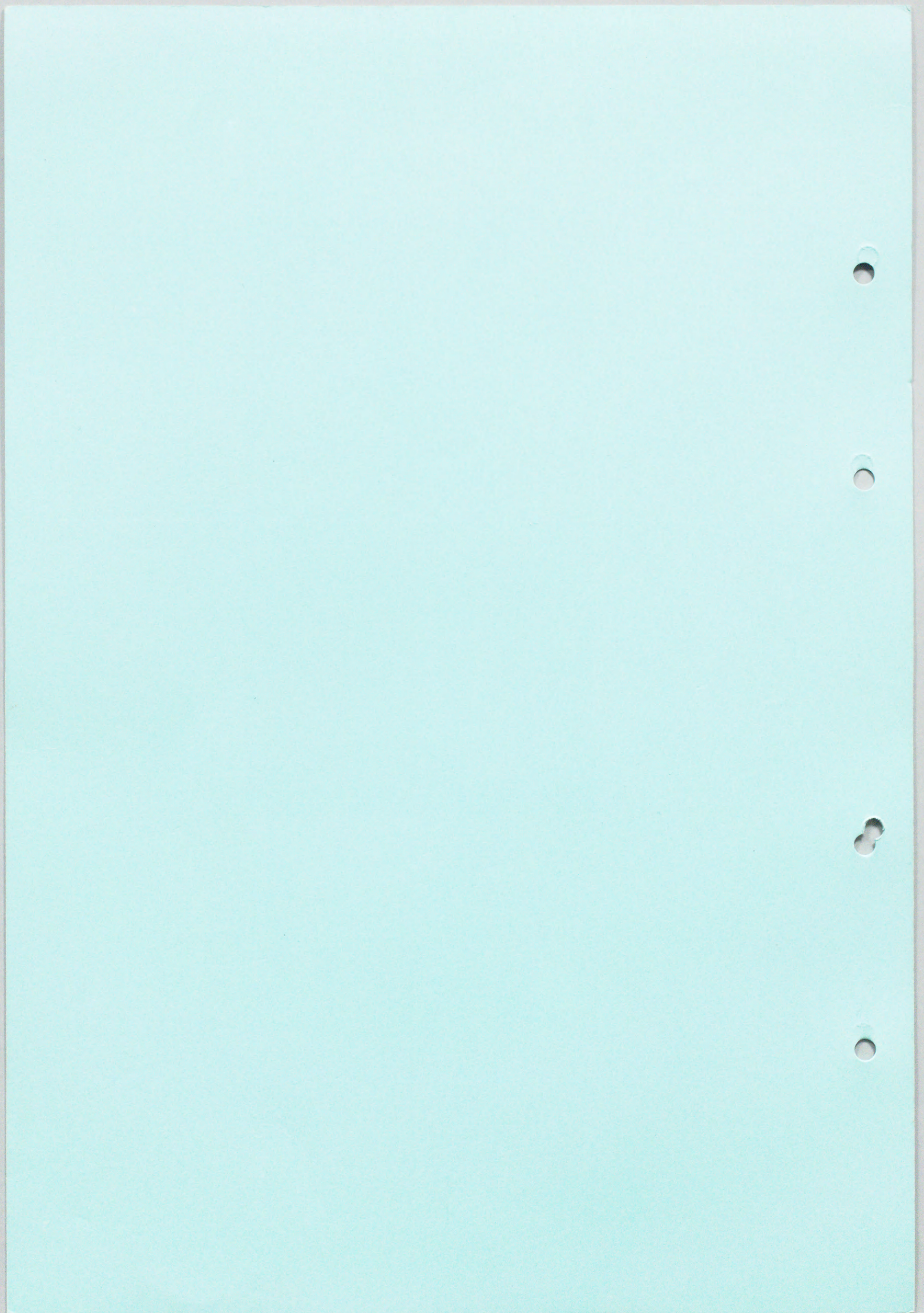
本研究にあたり、研究の初期段階より長年に渡りご指導と励ましを承りました原啓明教授に深く感謝致します。

また、本論文の主査をお引き受け下さり、忙しい中、時間をさいて御指導してくださった中村維男教授に深く感謝致します。

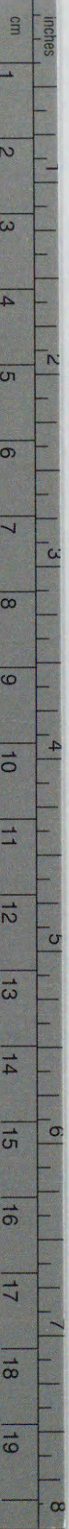
また、やはり多忙の中、審査にあたりまして有益な助言を頂きました猪岡光教授に深く感謝致します。

その他、原研究室に所属していました多くの大学院生の暖かい励まし、助言なしには、本研究の遂行は困難であったことをここに記しておきます。





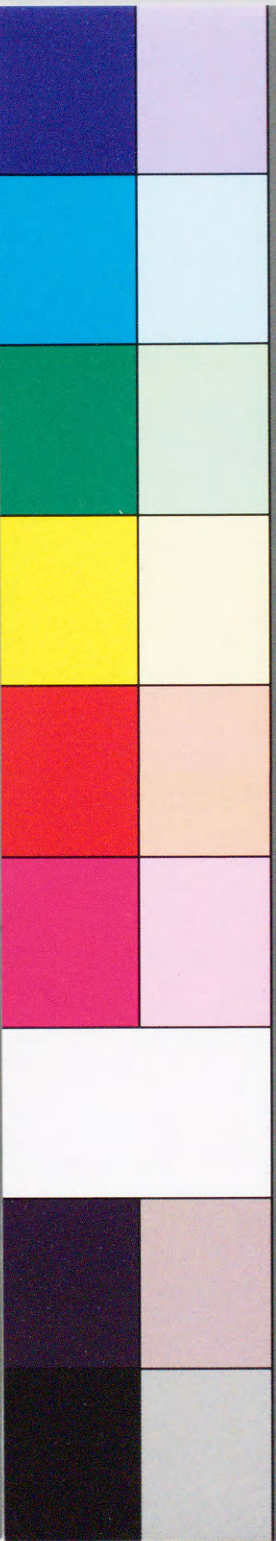




# Kodak Color Control Patches

© Kodak, 2007 TM: Kodak

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black



# Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM: Kodak

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

